Capitolo 3

Variabili aleatorie discrete

Esercizio 60 In una procedura di controllo di produzione, n processori prodotti da un processo industriale vengono sottoposti a controllo. Si assuma che ogni pezzo, indipendentemente dagli altri, abbia probabilità $p \in (0,1)$ di essere difettoso. Se un processore è funzionante supera sicuramente il test di controllo, se il processore è difettoso fallisce il test con probabilità $q \in (0,1)$, indipendentemente dagli altri. Sia X = numero di processori che hanno fallito il test. Determinare la distribuzione di X.

Esercizio 61 Due dadi truccati sono tali che la probabilità di ottenere un sei è il doppio della probabilità di ottenere ogni altro punteggio. Qual è la media del punteggio ottenuto lanciando i due dadi?

Esercizio 62 Da un'urna contenente r palline rosse e v palline verdi, si estraggono successivamente, senza reintroduzione, k palline, con $k \leq \min(r, v)$. Per $i = 1, 2, \ldots, k$, sia

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-ma pallina estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e $X = X_1 + \cdots + X_k$.

a. Determinare la distribuzione di X.
b. Determinare le distribuzioni delle X_i.
c.* Mostrare che la densità congiunta delle X_i è data da

$$p_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k) = \frac{r(r-1)\cdots(r - \sum_{i=1}^k x_i + 1)v(v-1)\cdots(v - k + \sum_{i=1}^k x_i + 1)}{(r+v)(r+v-1)\cdots(r+v-k+1)}$$

d. Calcolare $E(X)$.

Esercizio 63 Un'urna contiene $n \geq 1$ palline bianche e 2 palline rosse. Si eseguono estrazioni ripetute *senza reimmissione*. Introduciamo la variabile casuale

$$X = \text{numero di palline bianche estratte prima di estrarre una pallina rossa,}$$

la cui densità discreta verrà indicata con $p_X(k) = P(X = k)$.

a) Mostrare che, per $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$p_X(k) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}(n - k + 1).$$

b) Calcolare $E(X)$ (ricordare le formule $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, valide per ogni $n \geq 1$).

Esercizio 64 Per $n \geq 1$, sia X_n una variabile casuale che assume, con la stessa probabilità, i valori $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$. Se f è una funzione continua, sia

$$m_n = E(f(X_n)).$$

Mostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} m_n = \int_0^1 f(x)dx.$$

Esercizio 65 Siano X_1, X_2 variabili uniformi discrete sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$, dove $n \in \mathbb{N}$, tra loro indipendenti. Definiamo la variabile $Y := \min\{X_1, X_2\}$.

a) Si calcoli $P(Y = k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

b) Si mostri che, per ogni $t \in (0, 1)$, si ha che

$$\lim_{n \to \infty} P(Y \leq tn) \; = \; 2t - t^2 \,.$$

Esercizio 66 Siano X, Y variabili casuali a valori in $\mathbb{N}$, definite sullo stesso spazio di probabilità. Giustificare l'identità

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k, Y = n - k).$$

Esercizio 67 * Sia X una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$. Allora

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

Esercizio 68 Siano X, Y variabili aleatorie discrete, a valori in $\mathbb{N}$, con densità congiunta

$$p_{X,Y}(n, m) = c\frac{\lambda^n \mu^m \nu^{nm}}{n!m!}$$

dove $\lambda, \mu > 0$, $0 < \nu \leq 1$, e c è un'opportuna costante (quella per cui $\sum_{n,m} p_{X,Y}(n, m) = 1$).

a. Calcolare le densità marginali di X e Y.

b. Calcolare le probabilità condizionate $P(X = n|Y = m)$.

c.* Mostrare che gli eventi $\{X = n\}$, $\{Y = m\}$ sono indipendenti per ogni coppia $n, m \in \mathbb{N}$ se e solo se $\nu = 1$.

Esercizio 69 Si consideri la seguente classica strategia per il gioco della roulette. Gioco sempre sul rosso. Alla prima giocata punto un dollaro. Se perdo raddoppio la giocata, se vinco smetto. In ogni caso, dato che il mio capitale iniziale è 1023 dollari, se perdo 10 volte di seguito devo smettere. Sia X la differenza tra il mio capitale alla fine del gioco e il capitale iniziale. Calcolare $E(X)$.

Esercizio 70 Un gioco a premi ha un montepremi di 512\$. Vengono poste ad un concorrente 10 domande. Ad ogni risposta errata il montepremi viene dimezzato. Alla prima risposta esatta il concorrente vince il montepremi rimasto. Se non si da alcuna risposta esatta non si vince nulla. Un certo concorrente risponde esattamente ad una domanda con probabilità $p \in (0,1)$, indipendentemente dalle risposte alle altre domande. Sia X la vincita di questo concorrente.

a. Determinare la densità p_X di X.

b.* Calcolare $E(X)$

Esercizio 71 In un concorso vengono assegnate le idoneità per un dato servizio. Si assuma che ogni partecipante, indipendentemente dagli altri, abbia probabilità $p = \frac{3}{4}$ di ottenere l'idoneità. Al termine del concorso, a 10 tra gli idonei viene assegnato un posto di lavoro (se gli idonei sono meno di 10 vengono assegnati tanti posti di lavoro quanti sono gli idonei). Supponiamo che al concorso partecipino 15 persone, e sia X il numero dei partecipanti che ottengono l'idoneità ma non il posto di lavoro.

a. Determinare la distribuzione di X.

b. Calcolare $E(X)$.

Esercizio 72 Si considerino 5 urne identiche, ognuna contenente una pallina rossa e quattro palline verdi. Ogni urna viene assegnata ad uno di cinque giocatori, e ogni giocatore estrae una pallina dalla propria urna. Un montepremi di 3000 Euro viene diviso tra i giocatori che estraggono la pallina rossa.

a. Sia X il numero di Euro vinti da ogni giocatore vincente ($X = 0$ se nessun giocatore estrae la pallina rossa). Determinare la densità e la media di X.

b. Si supponga di considerare uno dei cinque giocatori, chiamiamolo Tizio, e sia Y il numero di Euro vinti da Tizio. Si determinino la densità e la media di Y.

Esercizio 73 Si sceglie "a caso" un campione di 5 oggetti da un lotto di 100 di cui 10 sono difettosi per effettuare un controllo di qualità. Sia X il numero di oggetti difettosi contenuti nel campione. Determinare la densità discreta di X.

Esercizio 74 Dimostrare le seguenti proprietà (3.1), (3.2) e (3.3):

$$\|X\|_1 = 0 \iff X \equiv 0; \tag{3.1}$$

$$X \in L^1(\Omega, P),\ \lambda \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \|\lambda X\|_1 = |\lambda| \|X\|_1; \tag{3.2}$$

$$X, Y \in L^1(\Omega, P) \ \Rightarrow \ \|X + Y\|_1 \leq \|X\|_1 + \|Y\|_1. \tag{3.3}$$

Esercizio 75 Si estraggono 3 biglie, senza reinserimento, da un'urna contenente 5 biglie rosse, 4 biglie bianche e 2 biglie verdi. Sia X il numero di biglie rosse estratte e Y il numero di biglie bianche estratte.

1. Scrivere la densità (discreta) di (X, Y).

2. Calcolare le densità marginali di X e Y e i valori attesi $E(X)$ ed $E(Y)$.

3. Calcolare la covarianza di X e Y.

Esercizio 76 Il piatto di una roulette contiene i numeri da 0 a 36. Consideriamo due possibili puntate: A) quella sui numeri pari: si vince se esce un numero pari tra 2 e 36, e in questo caso si riceve il doppio del capitale puntato (quindi si resta in attivo di una quantità uguale al capitale puntato); B) quella sulla prima dozzina: si vince se esce un numero tra 1 e 12, e in questo caso si riceve il triplo del capitale puntato (quindi si resta in attivo del doppio del capitale puntato).

Supponiamo di puntare contemporaneamente due Euro sui numeri pari, e un Euro sulla prima dozzina. Sia X il bilancio della giocata (capitale finale - capitale iniziale).

a) Determinare la densità di X e $E(X)$.

b) Si considerino le seguenti variabili casuali:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se esce un numero pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{se esce un numero della prima dozzina} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare $Cov(Y, Z)$.

c) Dopo aver espresso X come funzione di Y e Z, calcolare $E(X)$ e $Var(X)$ senza usare la densità calcolata in a).

Esercizio 77 In un'urna vi sono r palline rosse e v palline verdi. Estraggo in successione due palline, senza reintroduzione. Per $i = 1, 2$, sia

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-ma pallina è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare il coefficente di correlazione tra X_1 e X_2.

Esercizio 78 * Siano X, Y due variabili casuali che ammettono momento secondo, e sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X, Y) \\ Cov(X, Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

Si assuma, inoltre, che la matrice A abbia due autovalori distinti, e siano $v = \binom{v_1}{v_2}$, $w = \binom{w_1}{w_2}$ due autovettori linearmente indipendenti di A. Mostrare che le variabili casuali $Z = v_1 X + v_2 Y$ e $W = w_1 X + w_2 Y$ sono scorrelate.

Proposizione 3.1 *Sia $X \in L^2(\Omega, P)$.*

i. $Var(X) = 0$ se e solo se X è quasi certamente costante*, cioè se esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $P(X = c) = 1$.*

ii Per ogni $c \in \mathbb{R}$, $Var(X) \leq \|X - c\|_2^2$.

Esercizio 79 Siano $X, Y \sim Be(p)$ indipendenti, con $p \in (0, 1)$. Mostrare che le variabili casuali $X + Y$ e $X - Y$ sono scorrelate ma non indipendenti.

Esercizio 80 In un canale di trasmissione vengono trasmessi simboli binari. I disturbi sul canale fanno si che ogni simbolo trasmesso ha la probabilità del 2% di essere ricevuto errato, indipendentemente dagli altri simboli. I messaggi vengono trasmessi in "parole" composte da 50 simboli. Qual è la probabilità che una parola venga ricevuta con almeno due simboli errati? (Usare l'approssimazione di Poisson)

Esercizio 81 Sia X una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$, tale che

$$P(X = k) = \frac{e^{-2}2^k}{2k!}(1 + \lambda k),$$

con $\lambda > 0$.

a. Determinare il valore di λ

b. Sia $Y \sim Po(2)$. Mostrare che

$$P(X = k) = \frac{1}{2}[P(Y = k) + P(Y + 1 = k)].$$

c. Usando il risultato in b., calcolare media e varianza di X

Esercizio 82 Sia $\lambda > 0$ e $c : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ una funzione tale che $c(0) = 0$ e $\inf_{n>0} c(n) > \lambda$. Sia X una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$ con densità

$$p_X(n) = \begin{cases} \frac{1}{Z} & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{Z}\frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\cdots c(n)} & \text{se } n \geq 1, \end{cases}$$

dove $Z = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\cdots c(n)}$.

a. Mostrare che $E(c(X)) = \lambda$.

b. Mostrare che per ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che la v.c. $f(X + 1)$ ammette valor medio, si ha

$$E(c(X)f(X)) = \lambda E(f(X + 1)).$$

c.* Si assuma che, per ogni $n \geq 0$, $|c(n + 1) - c(n)| \leq 1$. Sia $Y \sim Po(\lambda)$. Mostrare, per induzione su k, che per ogni $k \geq 1$

$$E[c(X)^k] \leq E(Y^k).$$

(Sugg.: usare, dopo averla verificata, l'uguaglianza $E(Y^{k+1}) = \lambda \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} E(Y^i)$)

Esercizio 83 a. Siano $X_1, X_2 \sim Po(\lambda)$ indipendenti. Fissati $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq n$, calcolare

$$P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n). \tag{3.4}$$

b. Supponiamo che n sia fissato, e chiamiamo $q(k)$ il valore dell'espressione in (3.4). Mostrare che $q(\cdot)$ è il valore della densità di una variabile casuale binomiale, e determinarne i parametri.

c. Siano ora $X_1, X_2, \dots, X_m \sim Po(\lambda)$ indipendenti, con $m > 2$. Calcolare

$$q_m(k) = P(X_1 = k | X_1 + X_2 + \cdots + X_m = n),$$

e determinare i parametri della variabile casuale binomiale la cui densità è $q_m(\cdot)$.

Esercizio 84 Siano X, Z e W variabili casuali indipendenti con $X \sim Be(p)$, $Z, W \sim Po(\lambda)$. Definiamo

$$Y = XZ + W.$$

a. Determinare le densità $p_{X,Y}$ e p_Y.
b. Utilizzando la densità calcolata al punto a., determinare $E(Y)$ e $Var(Y)$.
c. Calcolare $E(Y)$ e $Var(Y)$ *senza* utilizzare p_Y.

Esercizio 85 Siano X e Y due variabili casuali a valori in $\mathbb{N}$ aventi la seguente densità congiunta:

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $p \in (0, 1)$ e $\lambda > 0$ sono due parametri fissati.
a. Determinare le densità marginali di X e Y. Mostrare, in particolare, che $X \sim Po(p\lambda)$ e $Y \sim Po(\lambda)$.
b. Calcolare il coefficente di correlazione $\rho_{X,Y}$.

Esercizio 86 Un'urna contiene 100 palline numerate da 0 a 99. Si estrae una pallina, e si denotano con X e Y le due cifre del numero estratto (la cifra delle decine, X, si considera uguale a zero per numeri minori di 10). Mostrare che X e Y sono indipendenti, e determinarne la distribuzione.

Esercizio 87 Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
i) Gli eventi A e B sono indipendenti.
ii) Le variabili casuali 1_A e 1_B sono indipendenti.
iii) Le variabili casuali 1_A e 1_B sono scorrelate (cioè $Cov(1_A, 1_B) = 0$).

Esercizio 88 Siano $X \sim Ge(p)$ e $Y \sim Ge(q)$, Determinare la densità di $\min(X, Y)$.

Esercizio 89 Siano $X, Y \sim Ge(p)$ indipendenti, $0 < p < 1$, e $Z := \max(X, Y)$.

a. Determinare la densità congiunta di (X, Z).

b. Posto $W := Z - X$, determinare la densità p_W di W.

c. Calcolare $E(W)$.

d. È vero o falso che X e W sono indipendenti?

Esercizio 90 Siano $X, Y \sim Ge(p)$ indipendenti, e si definisca $Z := \max(X, Y) - Y$.
a. Determinare la densità discreta di Z.
b. Determinare $E(Z)$ (sugg.: ricordare che $E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z \geq n)$, oppure usare la funzione generatrice dei momenti)

Esercizio 91 Sia X una variabile casuale che assume i valori 0 e 1 e Y una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$, la cui densità congiunta è determinata dalle identità: per $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = n) &= p\frac{e^{-1}}{n!} \\ P(X = 1, Y = n) &= (1-p)e^{-2}\frac{2^n}{n!}. \end{aligned}$$

a. Determinare le densità marginali p_X e p_Y.
b. Calcolare la probabilità condizionata $P(X = 0|Y > 0)$.
c. Calcolare $E(Y)$ e $Var(Y)$.
d. Calcolare $Cov(X, Y)$ e il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

Esercizio 92 Sia X una variabile casuale che assume i valori 0 e 1 e Y una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$, la cui densità congiunta è determinata dalle identità: per $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = n) &= \tfrac{p}{3} \left(\tfrac{2}{3}\right)^n \\ P(X = 1, Y = n) &= \tfrac{1-p}{4} \left(\tfrac{3}{4}\right)^n . \end{aligned}$$

a. Determinare le densità marginali p_X e p_Y.
b. Calcolare la probabilità condizionata $P(X = 0|Y > 0)$.
c. Calcolare $E(Y)$ e $Var(Y)$.
d. Calcolare $Cov(X, Y)$ e il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

Esercizio 93 Sia $X_n \sim Po(n\lambda)$, e $Y_n = \frac{X_n - n\lambda}{n^{2/3}}$. Usando la Disuguaglianza di Chebischev mostrare che per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n| > \epsilon) = 0.$$

Esercizio 94 Siano $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2, S\}$ variabili aleatorie indipendenti con le seguenti distribuzioni:

$$X_1 \sim X_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda)\,, \qquad Y_1 \sim Y_2 \sim \mathrm{Po}(\mu)\,, \qquad S \sim \mathrm{Be}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{B}\left(1, \frac{1}{2}\right)\,,$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ sono parametri fissati, con $\lambda \neq \mu$. Introduciamo le variabili Z_1, Z_2 definite da

$$Z_1 \;:=\; X_1\, \mathbf{1}_{\{S=0\}} \,+\, Y_1\, \mathbf{1}_{\{S=1\}}\,, \qquad Z_2 \;:=\; X_2\, \mathbf{1}_{\{S=0\}} \,+\, Y_2\, \mathbf{1}_{\{S=1\}}\,.$$

In altre parole, lancio una moneta equilibrata (descritta dalla variabile S) e pongo $(Z_1, Z_2) := (X_1, X_2)$ se esce testa (cioè se $S = 0$) mentre pongo $(Z_1, Z_2) := (Y_1, Y_2)$ se esce croce ($S = 1$).

a) Calcolare $E(Z_1)$ e $E(Z_2)$.

b) Mostrare che Z_1 e Z_2 **non** sono indipendenti (sugg.: calcolare $E(Z_1 Z_2)$).

Esercizio 95 Ad un bambino vengono regalati N palloncini gonfiabili. Ognuno di questi palloncini rimane "integro", cioè non scoppia, un numero di giorni la cui distribuzione è geometrica di parametro $p \in (0, 1)$. Si considerino indipendenti le durate dei diversi palloncini. Per $n = 1, 2, \ldots$ denotiamo con X_n il numero di palloncini ancora integri dopo n giorni.
a. Qual è la distribuzione di X_n?
b. Sia T la variabile casuale a valori naturali tale che l'ultimo palloncino scoppia dopo il $T + 1$-mo giorno. Calcolate $P(T > n)$ per ogni $n \geq 0$, e la densità discreta p_T di T.
c. Siano $1 \leq m \leq n$ e $0 \leq h \leq k \leq N$. Calcolare la probabilità condizionata

$$P(X_n = h|X_m = k).$$

d. Per ogni fissato $n \geq 1$, calcolare

$$P(X_n = N|X_{2n} = 0).$$

Esercizio 96 Siano $X_1, \ldots, X_n, T$ variabili casuali scalari indipendenti. Le variabili $X_1, \ldots, X_n$ hanno la stessa distribuzione, con $E(X_i) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$, mentre la variabile T prende valori in $\{1, \ldots, n\}$.

a) Si spieghi perché, per $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, le variabili casuali X_i e $1_{\{T \geq j\}}$ sono indipendenti.

Si introduca la variabile S definita da

$$S := \sum_{i=1}^{n} X_i \, 1_{\{i \leq T\}} \,.$$

b) Si mostri che $E(S) = \mu \, E(T)$.

c) Si mostri che $\mathrm{Cov}(S, X_j) = \sigma^2 P(T \geq j)$, per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Esercizio 97 Una compagnia di assicurazioni emette una polizza che pagherà n euro se l'evento E si verificherà entro un anno. Se la compagnia stima che l'evento E si verificherà entro un anno con probabilità p, quanto dovrebbe essere il costo della polizza per il cliente in modo che il profitto atteso per la compagnia sia $n/10$?

Esercizio 98 Una persona lancia una moneta equilibrata finchè non ottiene croce la prima volta. Se appare croce all'n-mo lancio, la persona vince 2^n euro. Denotiamo con X il guadagno del giocatore. Mostrare che $E(X) = +\infty$.

Esercizio 99 Sia $X \sim B(n, p)$. Mostrare che

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

Esercizio 100 Sia $X \sim Po(\lambda)$. Quale valore k massimizza $P(X = k)$?

Esercizio 101 Sia $X \sim Po(\lambda)$. Mostrare che

$$E\left[X^n\right] = \lambda E\left[(X+1)^{n-1}\right].$$

Si utilizzi questo risultato per calcolare $E(X^3)$.

Esercizio 102 * Sia S un insieme di n elementi, $\Omega = \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$, e P la probabilità uniforme su Ω. Consideriamo la variabile casuale X definita da $X(\omega) = |\omega|$. Mostrare che

$$E(X) = \frac{n}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$Var(X) = \frac{n 2^{2n-2} - n(n+1)2^{n-2}}{(2^n - 1)^2}.$$

Si mostri inoltre che, per n grande, $Var(X) \sim n/4$.

Esercizio 103 Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili casuali i.i.d., la cui funzione generatrice dei momenti $\gamma(t)$ è finita per ogni $t \in R$, e sia N una variabile casuale a valori in $\{1, 2, \ldots, n\}$, indipendente da $X_1, X_2, \ldots, X_n$, la cui densità discreta indichiamo con $p_N(\cdot)$. Definiamo la variabile casuale S come segue

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

a) Calcolare, in termini di $\gamma(t)$ e $\{p_N(j)\}_{1 \le j \le n}$, la funzione generatrice $\gamma_S(t)$ di S. (Sugg: osservare che $e^{tS} = \sum_{j=1}^{n} e^{t(X_1 + \cdots + X_j)} \mathbf{1}_{N=j}$.)

b) Calcolare media e varianza di S in termini di media e varianza di X_1 e di N.

Esercizio 104 Sia $(X_n)_{n \ge 1}$ una successione di variabili casuali indipendenti, tali che $X_n \sim Be(1/2^n)$. Definiamo la variabile casuale T, a valori in $\mathbb{N} \cup \{+\infty\} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots, +\infty\}$:

$$T = \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N} \text{ tali che } X_k = 1\} & \text{se } \{k \in \mathbb{N} \text{ tali che } X_k = 1\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Determinare un'espressione per $P(T > n)$. [*Sugg.*: si noti che l'evento $\{T > n\}$ può essere espresso in modo semplice in funzione delle prime n variabili $X_1, \ldots, X_n$.]

b) Scrivere $\log P(T > n)$ in forma di una somma $\sum_{k=1}^{n} a_k$, e mostrare che la serie $\sum_k a_k$ converge.

c) Dedurre che $P(T = +\infty) > 0$.

Esercizio 105 Siano $X \sim Be(p)$, $Y \sim Po(\lambda)$ e $Z \sim Po(\mu)$ variabili casuali indipendenti. Definiamo

$$W := XY + (1 - X)Z.$$

a) Senza fare calcoli con densità, calcolare media e varianza di W, e la covarianza $Cov(W, Y)$.

b) Determinare la densità congiunta di (W, Y), e la densità marginale di W.