Capitolo 4

Spazi di probabilità generali. Variabili casuali assolutamente continue

Esercizio 106 Sia X una v.c. uniformemente distribuita nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cioè

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} 1_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(x).$$

Posto $Y = \cos(X)$, trovare la distribuzione di Y.

Esercizio 107 Si scelga a caso un punto X dell'intervallo $[0, 2]$, con distribuzione uniforme di densità

$$f_X(x) = \frac{1}{2} 1_{[0,2]}(x)$$

(in altre parole, X è una v.c. con densità f_X). Qual è la probabilità che il triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza X abbia area maggiore di 1?

Esercizio 108 * Si scelga a caso un angolo $\Theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ con distribuzione uniforme di densità

$$f_\Theta(\theta) = \frac{2}{\pi} 1_{(0, \frac{\pi}{2})}(\theta),$$

e si consideri il punto del piano di coordinate $(\cos(\Theta), \sin(\Theta))$. Per tale punto si tracci la tangente alla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1, e sia L la lunghezza del segmento i cui estremi sono i punti d'intersezione di tale tangente con gli assi cartesiani. Determinare la distribuzione di L.

Esercizio 109 Sia $X \sim U(-1, 1)$, e $Y = \frac{1}{1-X^2}$. Determinare la distribuzione di Y.

Esercizio 110 * Sia X una variabile casuale scalare assolutamente continua, e tale che $P(X > 0) = 1$. Tramite un'opportuna integrazione per parti mostrare che

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t) dt.$$

Esercizio 111 Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Exp(\lambda)$ indipendenti, e

$$Y = \max(X_1, \ldots, X_n), \quad Z = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

Determinare la distribuzione di Y e Z.

Esercizio 112 Siano X e Y due variabili casuali scalari, assolutamente continue e indipendenti, con densità f_X e f_Y rispettivamente.

a. Mostrare che, posto $Z = X - Y$,

$$f_Z(z) = \int f_X(x+z) f_Y(x) dx.$$

b. Usando la formula nel punto a., determinare f_Z nel caso in cui $X \sim Exp(1)$ e $Y \sim Exp(1)$.

Esercizio 113 * Sia X una variabile casuale scalare assolutamente continua con densità f_X, e sia Y una variabile casuale scalare discreta di densità p_Y. Supponiamo che Y assuma solo un numero finito di valori, cioè l'insieme $\{x : p_Y(x) > 0\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ è finito, e che X e Y siano indipendenti.

a. Esprimere la funzione di ripartizione di $X + Y$ in termini di f_X e p_Y.

b. Mostrare che $X + Y$ è una variabile casuale assolutamente continua, e determinarne la densità in funzione di f_X e p_Y.

Esercizio 114 * Sia X una variabile casuale la cui funzione di ripartizione è

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ x/2 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

Sia inoltre $Y \sim U(0,1)$ indipendente da X, e si definisca

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{se } X(\omega) < 1 \\ Y(\omega) & \text{se } X(\omega) = 1 \end{cases}$$

Determinare la distribuzione di Z (sugg: determinare la funzione di ripartizione di Z)

Esercizio 115 Un congegno elettronico è costituito da n componenti collegate in serie: esso smette di funzionare non appena una qualsiasi delle sue componenti smette di funzionare. Siano $T_1, T_2, \ldots, T_n$ i tempi di vita delle n componenti, che si assumono indipendenti e identicamente distribuiti con distribuzione esponenziale di parametro 1. Sia X_n il tempo di vita dell'intero dispositivo.

a. Determinare la distribuzione di X_n.

b. Mostrare che, per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n > \epsilon) = 0$$

Esercizio 116 Sia X una variabile casuale scalare assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = -\log(x) 1_{(0,1)}(x).$$

a. Determinare la funzione di ripartizione di X.

b. Sia $Y = -\log X$. Determinare la distribuzione di Y. In particolare, mostrare che Y è una variabile Gamma, e determinarne i parametri.

Esercizio 117 L'ufficio informazioni delle Ferrovie dello Stato ha due numeri verdi. Il tempo di attesa T_i, $i = 1, 2$ per parlare con l'operatore è, per entrambi i numeri, una variabile casuale esponenziale di media $\mu = 15$ minuti. Inoltre T_1 e T_2 si possono considerare indipendenti. Avendo a disposizione due telefoni, decido di chiamare contemporaneamente i due numeri, in modo da parlare con l'operatore che per primo risponderà.

a. Quanto tempo, in media, dovrò aspettare per parlare con un operatore?

b. Qual è la probabilità di attendere meno di 5 minuti?

Esercizio 118 * Sia X una variabile casuale scalare, e sia F_X la sua funzione di ripartizione.

a. Supponendo che F_X sia invertibile (e perciò anche continua), determinare la distribuzione della variabile casuale $Y = F_X(X)$.

b*. Mostrare che il risultato al punto a. vale anche assumendo solo la continuità di F_X.

c. Mostrare, con un controesempio, che invece il risultato al punto a. può essere falso so F_X non è continua.

d. Mostrare che il risultato al punto a. è *sicuramente* falso se F_X è discontinua (pensare al supporto della distribuzione di Y).

Esercizio 119 Siano $X \sim Exp(1)$ e $Y \sim Exp(1/2)$ variabili casuali indipendenti. Determinare la densità di $X + Y$.

Esercizio 120 * Sia X una variabile casuale scalare la cui funzione di ripartizione è

$$F(x) = e^{-e^{-x}}.$$

a. Determinare la distribuzione della variabile casuale $Y := e^{-X}$.

b. Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili i.i.d. con distribuzione $Exp(1)$, e $M_n := \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Sia inoltre $\xi_n := M_n - \log(n)$, e si denoti con F_{ξ_n} la relativa funzione di ripartizione. Mostrare che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{\xi_n}(t) = F(t).$$

c. Sia $Z_n := \frac{M_n}{\log(n)}$, e F_{Z_n} la relativa funzione di ripartizione. Mostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ e^{-1} & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e dedurre che per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{M_n}{\log(n)} - 1\right| > \epsilon\right) = 0.$$

Esercizio 121 In questo esercizio, la notazione $\lfloor x \rfloor$, per $x \in \mathbb{R}$, indica la *parte intera* del numero reale x.

Sia $X \sim U(0, 1)$, e definiamo: $X_1 := X$, $X_2 := 2X_1 - \lfloor 2X_1 \rfloor$, $Y_1 := \lfloor 2X_1 \rfloor$, $Y_2 := \lfloor 2X_2 \rfloor$.

a. Mostrare che $Y_1, Y_2 \sim Be(1/2)$ e che sono indipendenti.

b. Generalizzare l'argomento usato al punto a. mostrando che, se si definiscono induttivamente

$$X_{n+1} := 2X_n - \lfloor 2X_n \rfloor, \quad Y_n := \lfloor 2X_n \rfloor,$$

allora $(Y_n)_{n\geq 1}$ è una successione di variabili casuali i.i.d. con distribuzione $Be(1/2)$.

Esercizio 122 Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili casuali indipendenti con distribuzione $Exp(1)$. Definiamo, per $t > 0$ fissato,

$$Y := \max\{n : X_1 + X_2 + \cdots X_n \leq t\}.$$

a. Spiegare l'identità

$$P(Y \geq n) = P(X_1 + X_2 + \cdots X_n \leq t).$$

b. Ricordando che $X_1 + X_2 + \cdots X_n \sim \Gamma(n, 1)$, tramite un'opportuna integrazione per parti mostrare che

$$P(X_1 + X_2 + \cdots X_n \leq t) = e^{-t}\frac{t^n}{n!} + P(X_1 + X_2 + \cdots X_n + X_{n+1} \leq t).$$

c. Dedurre che $Y \sim Po(t)$.

Esercizio 123 Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili casuali scalari i.i.d. con distribuzione uniforme nell'intervallo $(0, 1)$, definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Introduciamo per $k \in \mathbb{N}$ l'evento A_k definiti da

$$A_k = \left\{X_k \leq \frac{1}{3}\right\}$$

e introduciamo la variabile casuale $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ definita per $\omega \in \Omega$ da

$$T(\omega) := \inf\left\{k \geq 1 : \ X_k(\omega) \leq \frac{1}{3}\right\}.$$

a) Per ogni fissato $n \in \mathbb{N}$, si esprima l'evento $\{T = n\}$ in termini degli eventi $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

b) Si determini la densità discreta $p_T(n)$ di T, mostrando che $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_T(n) = 1$.

Introduciamo la variabile $Y := X_T$, cioè $Y(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$.

c)* Si determini la funzione di ripartizione $F_Y(x)$ di Y. (*Sugg.*: si calcoli innanzitutto $P(Y \leq x, T = n)$ per $n \in \mathbb{N}$.)

Esercizio 124 * Siano $X, Y \sim Exp(1)$ indipendenti, e siano

$$W \ := \ X - Y\,, \qquad\qquad Z \ := \ X - \min(X, Y)\,.$$

a) Calcolare la densità di W.

b) Calcolare la funzione di ripartizione di Z.
(*Sugg.*: conviene calcolare $P(Z > z)$, per $z \in \mathbb{R}$. Può essere utile esprimere Z in funzione di W.)

c) Mostrare che Z non è né una variabile casuale discreta né una variabile casuale assolutamente continua.

Esercizio 125 Una variabile aleatoria reale X è detta *di Cauchy* se è assolutamente continua con densità

$$f_X(x) \ := \ \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Si mostri che $P(X > 1) = P(X < -1) = \frac{1}{4}$.

b) Si dimostri che $Y := 1/X$ è di Cauchy.