Corso di laurea in Matematica - Calcolo delle Probabilità e Statistica
Esercizi per le vacanze di Natale

Dagli appunti: es. 34 38 39 40 (attenzione: negli es. 38 e 39 ci si riferisce all'esempio 84 e non 83) Dagli esercizi nel sito: 63 82 88 91 97 100 125 e poi quelli qui di seguito.

Esercizio 1. *Un'asta di secondo prezzo in busta chiusa è un'asta in cui se le offerte sono $x_1, \dots, x_n$ diverse tra loro, queste si ordinano $x_{(1)} < \dots < x_{(n)}$ e si dichiara vincitore chi ha fatto l'offerta più alta $x_{(n)}$, che però paga il secondo prezzo, ossia $x_{(n-1)}$. Supponiamo che ora n concorrenti abbiano per un bene valutazioni i.i.d. $V_1, \dots, V_n$, che indichiamo con $V_{(1)}, \dots, V_{(n)}$ quando sono state riordinate (ossia $V_{(1)} < \dots < V_{(n)}$) .*

- *(1) verificare che la rivelazione della propria valutazione è un equilibrio di Nash (ossia se tutti gli altri giocatori usano questa strategia non è conveniente per un giocatore non usarla);*
- *(2) esprimere la densità di $V_{(n)}$ in termini delle funzioni di densità e di distribuzione delle V_i;*
- *(3) esprimere la densità di $V_{(n-1)}$ in termini delle funzioni di densità e di distribuzione delle V_i;*
- *(4) calcolare il ricavo atteso del venditore, ossia $E(V_{(n-1)})$, nel caso che $V_i \sim U[0,2]$.*

Esercizio 2. *Se P è una catena di Markov con matrice di transizione A su un insieme S, esprimere in termini della matrice $P(X_n = a_n | X_0 = a_0)$ per $a_0, a_n \in S$.*

Esercizio 3. *In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mostrare che se gli eventi A_i sono tali che $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$ allora*

$$P(\limsup A_i) = P(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{i=k}^{\infty} A_i) = 0$$

Esercizio 4. *Verificare se, per S un insieme almeno numerabile ed $A \subset S$ finito non vuoto, la famiglia $\mathcal{L} = \{B \subseteq S | B \cap A = \emptyset$ oppure $B \cap A = A\}$*

- *(1) è una classe-π*
- *(2) è una classe-λ*
- *(3) è σ-algebra.*

Esercizio 5. *Dato $\Omega = \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ sia P tale che*

$$P(C_{1,\dots,k}^{s_1,\dots,s_k}) = \prod_{i=1}^{k} p_{s_i}.$$

con $p_0 = 1/2 = p_2, p_1 = 0$, che è una probabilitàsulla σ-algebra generata dai cilindri. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i 3^{-i}$

- *(1) Verificare che X è una variabile aleatoria.*
- *(2) Descrivere la funzione di distribuzione di X.*
- *(3) X è assolutamente continua, ossia esiste una densità f_X tale che $P_X = f_X \lambda$?*