Corso di Probabilità e statistica Prova del secondo test - a.a. 2010-2011

Esercizio 1. *Si considerino due variabili X ed Y tali che la loro distribuzione congiunta è uniforme sull'insieme*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^{-2}\}.$$

- *(I) Descrivere la funzione di densità congiunta di X ed Y;*
- *(II) descrivere le densità marginali di X ed Y;*
- *(III) calcolare $E(X)$, $SD(X)$, $E(Y)$ e $SD(Y)$;*
- *(IV) calcolare la correlazione r tra X ed Y;*
- *(V) calcolare $E(X|Y = 1/2)$;*

Esercizio 2.
- *(I) Determinare la distribuzione di Y*
- *(II) Determinare la distribuzione condizionata di X dato Y.*
- *(III) Calcolare la correlazion e tra X ed Y e discuterne in valore.*

Esercizio 3. *Se X ha distribuzione esponenziale di parametro λ determinare la distribuzione di cX.*

Esercizio 4. *Dati due eventi A e B in uno spazio di probabilità si consideri la proprietà*

$$(*) P(A \cap B) > P(A)P(B).$$

- *(I) Se per A e B vale la (*) determinare diseguaglianze analoghe per A e B^c, e per A^c e B^C.*
- *(II) Se per due successioni crescenti di eventi A_i e B_i vale che per ogni i la coppia di eventi A_i e B_i soddisfa $(*)$, dimostrare che $(*)$ vale anche per la coppia $\cup_i A_i$ e $\cup_i B_i$.*

Esercizio 5. *Se X ed Y sono variabili aleatorie i.i.d. uniformi in $[0, 1]$, calcolare:*

- *(I) $P(|X - Y| \leq 0,5)$:*
- *(II) $P(|X/Y - 1| \leq 0,5)$:*
- *(III) $P(Y \geq X|Y \geq 1/2)$.*

Esercizio 6. *In un certo numero di esperimenti indipendenti si attende la prima realizzazione di un certo evento, che risulta essersi realizzato per la prima volta alla prova indicata nell'elenco: $4, 1, 4, 10, 5, 2, 8, 1$. Si afferma che l'evento che viene atteso ogni volta fosse l'uscita del 6 in un dado. Abbiamo elementi per dubitare di questa affermazione al livello 5%?*

Esercizio 7. *Si consideri un esperimento i cui risultati sono realizzazioni indipendenti di variabili aleatorie con densità $f(x) = cx^a$ per $a > 0$ e c un'opportuna costante.*

- *(I) Si descriva un modello statistico adeguato alla stima del parametro a;*
- *(II) si descriva uno stimatore dei momenti di a;*
- *(III) si decriva uno stimatore di massima verosimiglianza di a;*
- *(IV) si valuti, se possibile, se gli stimatori determinati ai punti precedenti sono non distorti.*