Esercizi di calcolo delle probabilità e statistica
Complemento alla guida per insegnanti

Ottobre 2009

Prof. Alberto Gandolfi
Dipartimento di Matematica U. Dini
Università di Firenze
gandolfi@math.unifi.it

Indice

Capitolo 1. Traduzione di esercizi assegnati alla maturità tedesca 4
1.1. Liceo classico 2008/1 4
1.2. Liceo classico 2008/2 5
1.3. Liceo scientifico 2008/1 6

CAPITOLO 1

Traduzione di esercizi assegnati alla maturità tedesca

1.1. Liceo classico 2008/1

Al nuovo reality l'isola partecipano 7 donne e 7 uomini come concorrenti.

Esercizio 1. *Per il viaggio verso l'isola ci sono tre barche, una per 8 persone, una per 4 ed una per 2.*

(a) In quanti modi si possono disporre i 14 concorrenti in modo che ognuna delle barche sia piena.

(b) Gli spettatori hanno scelto tra i candidati i leader delle tre barche: Judith per la barca da 8, Sabine per quella da 4 e Laura per quella di 2. Quanti modi diversi ci sono ora per formare gli equipaggi delle tre barche in modo che ci siano su ognuna lo stesso numero di uomini e di donne?

Esercizio 2. *Nel gioco della ricerca del tesoro un concorrente deve aprire dei forzieri. Per ogni forziere ci sono 6 chiavi, apparentemente uguali ma diverse, 4 delle quali non entrano nella serratura. Ognuna delle altre 2 chiavi apre il forziere. Per ogni forziere il concorrente può provare 2 diverse chiavi scelte a caso.*

(a) Dimostrare, con l'aiuto di un diagramma, che la probabilità di aprire un forziere è del 60%.

(b) Quanti forzieri devono essere aperti in questo gioco affinchè con probabilità superiore al $99,9\%$ *venga aperto almeno un forziere?*

(c) Determinare la probabilità degli eventi seguenti:

- *A: Di* 15 *forzieri ne vengono aperti* 7.
- *B: Di* 15 *forzieri ne vengono aperti più di* 10

Esercizio 3. *Nel gioco Caccia alle Perle un concorrente può aprire una di* 300 *conchiglie.* 55% *delle conchiglie sono dipinte con color oro, e le rimanenti sono nere. Il* 24% *delle conchiglie contengono perle e le altre sono vuote. Il* 32% *delle conchiglie non sono nè color oro e nè contengono una perla.*

(a) Quante conchiglie dorate non contengono la perla?

(b) Una conchiglia viene scelta a caso. Determinate se gli eventi d̈orataë c̈ontiene una perlas̈ono stocasticamente indipendenti.

(c) Per un concorrente che voglia trovare una perla è più conveniente aprire una conchiglia dorata o una nera? Motivare la risposta sulla base del calcolo.

Esercizio 4. *Il produttore del programma intende finanziare il seguito del programma soltanto se più del* 75% *degli spettatori dell'Isola sono a favore della prosecuzione. La decisione se proseguire o meno viene presa con l'aiuto di un sondaggio tra 200 spettatori scelti a caso. La probabilità che il programma venga incorrettamente proseguito dovrà essere al massimo* 5%*. Dare una regola per la prosecuzione in modo che la probabilità di un incorretto mancato seguito del programma sia la più piccola possibile.*

1.2. Liceo classico 2008/2

Viene immessa nel mercato delle bevande una nuova bibita chiamata BioFrucht. La bibita viene prodotta in quattro forme: Mela (A), Lampone (B), Limone (C) e Pesca (D).

Esercizio 5. *Il produttore di BioFrucht ritiene che una campagna pubblicitaria del prodotto non sia necessaria nel caso che, come congetturato, il grado di conoscenza* p *della bibita sia almeno* 40%*. Per verificare se questo sia il caso vengono intervistate 200 persone scelte a caso. Il produttore rigetterà la sua ipotesi che* $p \geq 0,4$ *ed inizierà una campagna pubblicitaria con campioni omaggio se nel campione conoscono BioFrucht meno di* 70 *persone.*

(a) Quant'è la probabilità che non venga avviata nessuna campagna con campioni omaggio anche se la bibita è nota solo dal 30% *della popolazione?*

(b) Calcolare la probabilità massima che il produttore della bibita distribuisca campioni omaggio inutilmente.

Esercizio 6. *In una città viene realizzata la campagna pubblicitaria. Per farlo vengono distribuiti da uno stand nella zona pedonale campioni gratuiti di BioFrucht che contengono 5 bottiglie dei tipi A, B, C e D. Un collaboratore della ditta produttrice prende a caso 5 bottiglie da un frigorifero pieno e li consegna ai passanti. Qual è la probabilità che vengano consegnati ad un dato passante*

(a) due A, due B ed un D?

(b) almeno una bottiglia di ogni tipo?

Esercizio 7. *Come seconda parte della campagna pubblicitaria viene costruito nella zona pedonale uno stand diviso in 4 settori, uno per ogni tipo di BioFrucht. Quando un passante si avvicina gli viene regalata una bottiglia da uno dei settori. 10 persone si avvicinano ognuno una volta allo stand.*

(a) Calcolare la probabilità degli eventi seguenti:

- *(E) Esattamente 3 persone ricevono una bottiglia del tipo D.*

- *(F) Almeno 3 persone ricevono una bottiglia del tipo D.*
- *(G) 3 ricevono il tipo D e le altre un altro tipo.*

(b) Da quante persone deve essere avvicinato lo stand per far in modo che con probabilità almeno 95% *almeno una delle bottiglie di tipo C venga distribuita?*

Esercizio 8. *Per sondare la popolarità dei diversi tipi di succo viene fatto un sondaggio. Tra le persone che hanno risposto si trovano* 12% *A,* 18% *B,* 28% *C e* 42% *D.*

(a) 204 persone hanno scelto mela (A). Quante persone hanno scelto pesca (D)?

(b) Le persone che hanno espresso una preferenze vengono ulteriormente classificate a seconda del sesso, trovando che il 10% *sono donne che hanno scelto pesca (D) ed il* 25% *sono uomini che hanno scelto un gusto diverso dalla pesca (D). Valutare se gli eventi (I) [una persona scelta a caso ha scelto pesca (D)] e (II) [una persona scelta a caso è un uomo] sono stocasticamente indipendenti.*

1.3. Liceo scientifico 2008/1

In una regione il 60% dei nuclei familiari hanno una connessione internet. Il diagramma mostra le percentuali relative alle velocità di connessione tra i nuclei familiari con connessione internet in questa regione, riportando connessione lenta ($>$ 1MBit/s) il 43%, media il 35% e veloce ($>$ 6Mbit/s) il 22%. Su richiesta di un provider viene realizzato un sondaggio sull'utilità di internet tra tutti i nuclei familiari nella regione.

Esercizio 9. *A questo scopo vengono scelti* 25 *nuclei familiari a caso nella regione.*

(a) Quanto vale la probabilità che meno della metà dei nuclei familiari scelti abbiano una connessione internet?

(b) Quanto vale la probabilità che tra i nuclei familiari scelti almeno due abbiano una connessione veloce?

I nuclei familiari scelti si possono dividere in quattro gruppi come in tabella: senza internet 9, con connessione lenta 7, media 5, veloce 4. Come ringraziamento per aver preso parte al sondaggio vengono sorteggiati tre premi tra i 25 *nuclei familiari, con il vincolo che ogni nucleo può ricevere al massimo un premio.*

(c) Con quale probabilità i tre premi non sono tutti assegnati a nuclei familiari con connessione internet?

(d) Con quale probabilità tutti i premi andranno a finire nello stesso gruppo?

Esercizio 10. *Quanti nuclei familiari di questa regione devono essere presi come minimo in un campione casuale per fare in modo che con probabilità maggiore di* 99% *si sceglierà almeno un nucleo con connessione veloce?*

Esercizio 11. *Il provider intende realizzare una campagna pubblicitaria in questa regione se, come congetturato, al massimo il* 40% *dei nuclei familiari con connessione lenta sa che è tecnicamente possibile realizzare una connessione più veloce. Per testare questa congettura si realizza un sondaggio scegliendo a caso* 50 *nuclei familiari con connessione lenta. Il provider realizzerà la campagna a seconda del risultato del test.*

Fornite l'ipotesi nulla e determinate la corrispondente regola di separazione (= regione di rigetto) al livello di signifiticatività del 5%.

Esercizio 12. *Attraverso un sondaggio telefonico dei nuclei familiari senza connessione internet il provider cerca di capire se la situazione economica sia la causa del mancato interesse per la connessione. Per fare in modo che gli intervistati non rispondano in modo alterato su delicate questioni economiche si elabora una procedura per fare in modo che l'intervistatore non venga a sapere della situazione finanziaria. La procedura è la seguente.*

Prima si chiede all'intervistato di lanciare due volte una moneta e di segnarsi il risultato senza dirlo all'intervistatore. Poi vengono proposte due domande. Se il risultato delle monete era due teste si risponde alla domanda A, altrimenti alla domanda B. La risposta sarà sempre un -sì - oppure un -no-.

Le due domande sono:

- *(A) La vostra scelta di non avere una connessione internet è basata su ragioni economiche?*
- *(B) La vostra scelta di non avere una connessione internet è basata su ragioni non economiche?*

Il 68% *degli intervistati risponde -sì -. Da questo dato il provider stima la frazione* p *di nuclei familiari che non hanno connessione internet per motivi economici. Stimare tale* p.

Esercizio 13. *Il provider offre ai suoi clienti le seguenti tariffe:*

- *FLAT: connessione per un tempo illimitato a €35.*
- *TIME: €10,50 al mese per un uso di internet fino a 20 ore nel mese, con un costo di €1,40 per ogni ora ulteriore.*
- *a) Determinate quale delle due tariffe è preferibile con un uso mensile di 37 ore e 15 minuti.*
- *b) Nell'ultimo mese i clienti di TIME sono stati connessi in media 27,5 ore, con tempi di utilizzo distribuiti in modo normale. Per* 4% *di questi clienti la tariffa FLAT sarebbe stata più vantaggiosa. Determinare la deviazione standard della variabile aleatoria -tempo di utilizzo di internet da parte di un cliente di TIME-.*