Soluzioni

Soluzione esercizio 1.

Prima soluzione.
Supponiamo che il vocabolario contenga N parole, che elenchiamo, nell'ordine del vocabolario, con $v_1, v_2, \ldots, v_N$. Per ogni $i = 1, 2, \ldots, N$, sia p_i la parola scritta da Pierino accanto alla parola v_i. Osserviamo che

$$\sum_{i=1}^{N} \# v_i = \sum_{i=1}^{N} \# p_i$$

dove, per ogni parola v, abbiamo indicato con $\# v$ il numero delle sue consonanti. Questo perché le parole, seppur in ordine diverso, sono le stesse.
Supponiamo per assurdo che ogni parola scritta da Pierino non abbia più consonanti della parola stampata accanto, cioè $\# p_i \leq \# v_i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, N$.
Poiché Pierino ha scritto NUMISMATICA accanto a TOPONOMASTICA, per almeno un indice i_0 (corrispondente a queste parole), si ha $\# p_{i_0} < \# v_{i_0}$, e quindi

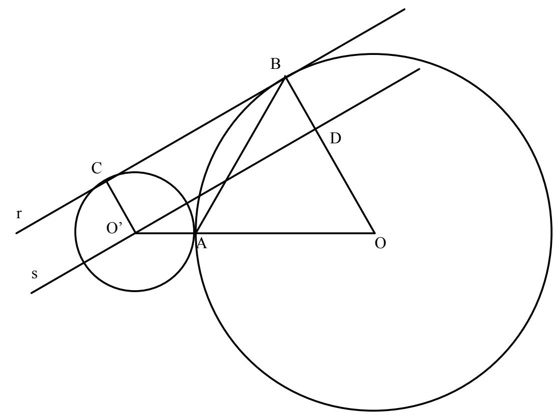
$$\sum_{i=1}^{N} \# v_i < \sum_{i=1}^{N} \# p_i ,$$

in contraddizione con quanto detto prima.

Seconda soluzione.
Sia P_1 = TOPONOMASTICA e chiamiamo P_{i+1} la parola che Pierino ha scritto accanto alla parola stampata P_i. Sia N_i il numero di consonanti della parola P_i. Notiamo che P_2 = NUMISMATICA e che $N_1 = 7$, $N_2 = 6$. Siccome il numero di parole del vocabolario è finito, ad un certo punto le parole della successione P_i devono ripetersi. Inoltre la prima parola a ripetersi deve essere TOPONOMASTICA in quanto se $P_i = P_j$ e $i > j > 0$, allora anche $P_{i-1} = P_{j-1}$. Dunque esiste un k tale che $P_k = P_1$. Se per assurdo si avesse $N_{i+1} \leq N_i$ per ogni i, allora essendo $N_2 = 6$ avrei $N_i \leq 6$ per ogni $i > 1$. Ma questo è in contraddizione col fatto che $N_k = N_1 = 7$.

Terza soluzione.
Ragioniamo considerando il peggior caso possibile. Consideriamo le parole con 0 consonanti. Se Pierino ha scritto accanto ad una di queste una parola con più consonanti, il problema è risolto. Supponiamo allora che non sia questo il caso, per cui Pierino ha scritto accanto ad ogni parola con 0 consonanti un'altra parola con 0 consonanti, esaurendo così tali parole.
Alla stessa maniera, se Pierino ha scritto accanto ad una parola con 1 consonante una parola con più consonanti, il problema è risolto. Perché questo non accada, Pierino scrive parole con 1 o meno consonanti. Ma le parole con 0 consonanti sono già esaurite, per cui accanto ad ogni parola con 1 consonante, Pierino scrive un'altra parola con 1 consonante.
Il ragionamento prosegue in maniera analoga per 2, 3, 4 e 5 consonanti. Al momento di scrivere a penna le parole accanto alle parole con 6 consonanti, Pierino ha già esaurito le parole con meno di 6 consonanti. D'altra parte, la parola NUMISMATICA è già utilizzata, per cui, se le parole del vocabolario con 6 consonanti sono N, Pierino ha a disposizione solo $N - 1$ parole da 6 consonanti. Una almeno di queste parole dovrà essere accoppiata ad una parola che non potrà avere né 6 consonanti, né tanto meno un numero di consonanti più piccolo di 6.
Un ragionamento analogo può essere condotto partendo dalle parole con un numero di consonanti maggiori di 7, a partire dalle parole con il maggior numero di consonanti.

Soluzione esercizio 2.



Per prima cosa osserviamo che $OA = OB$ perché sono due raggi della stessa circonferenza; quindi per risolvere il problema basta dimostrare che l'angolo $A\hat{O}B$ è di 60°.
Sia $AO' = R$, quindi $AO = OB = 3R$. Tracciamo (vedi figura) per O' la retta s parallela alla retta r e sia D il punto di incontro di questa retta con il raggio OB. Il quadrilatero $CO'DB$ è un rettangolo infatti BD e $O'C$ sono perpendicolari a r ed a s. Pertanto $BD = O'C = R$ e per sottrazione $OD = 2R$.
Consideriamo infine il triangolo ODO'; esso è metà di un triangolo equilatero perché $4R = OO' = 2\ OD$ da cui si ottiene che l'angolo $D\hat{O}O'$ è di 60°.

Soluzione esercizio 3.

Sia g il numero di gruppi di perline bianche, ℓ la lunghezza di ciascun gruppo ed n il numero totale di perline di una collana. Dalle prime tre regole segue facilmente che ci sono due tipi di collane: quelle con gli estremi neri e quelle con gli estremi bianchi.
Nel primo caso si ha $n = g(\ell + 1) + 1$; dato che $g \geq 2$ per la quarta regola, e che $\ell \geq 1$ per la prima regola, si ha una scomposizione di $n - 1$ come prodotto di due interi più piccoli.
Pertanto, esiste una collana con estremi neri e n perline se e solo se $n - 1$ non è un numero primo.
Analogamente, esiste una collana con estremi bianchi e n perline se e solo se $n + 1$ non è un numero primo.
Quindi, non esiste alcuna collana con n perline se e solo se ambedue i numeri $n - 1$ e $n + 1$ sono primi. Due numeri primi la cui differenza è 2 sono detti "primi gemelli". Per cui si può dire che la collana con n perline esiste se e solo se n non è compreso fra due primi gemelli.
A titolo di curiosità, le prime coppie di primi gemelli sono: (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), …
Questo risponde alle prime due domande, dato che sia 12 che 18 sono numeri contornati da coppie di primi gemelli.
Alla terza domanda si risponde osservando che, se n non è multiplo di 6, allora almeno uno tra i numeri $n - 1$ e $n + 1$ non è primo. Infatti, tutti i primi maggiori di 6 possono essere espressi nella forma $6k + 1$ o $6k + 5$, poiché $6k$, $6k + 2$, $6k + 4$ sono pari e $6k + 3$ è multiplo di 3. Per cui, se n non è multiplo di 6, allora almeno uno tra $n - 1$ e $n + 1$ non è primo; dalla sua scomposizione si costruisce la collana con n perline.

Soluzione esercizio 4.

Una generica traiettoria su un biliardo circolare perfetto è costituita, dopo il primo rimbalzo, da una poligonale con le seguenti caratteristiche:

(*a*) i lati hanno tutti la stessa lunghezza;

(*b*) gli angoli di incidenza alla circonferenza sono tutti uguali.

Di conseguenza l'insieme delle traiettorie possibili, a meno di rotazioni, si può identificare fissando un punto sul perimetro del biliardo e facendo variare l'angolo di incidenza X fra 0 gradi (escluso) e 90 gradi (incluso). Escludiamo la traiettoria "degenere" corrispondente ai 90 gradi perché non è interessante ai fini della risoluzione dell'esercizio (dopo 5 sponde infatti non torna al punto di partenza con lo stesso verso di uscita). D'altra parte l'insieme delle traiettorie chiuse e "non degeneri", che cioè dopo n rimbalzi tornano al punto di partenza, è descritto dalla condizione
$n\ (2X)$ = multiplo di 360 gradi.
Quando $n = 5$ questa equazione da due possibili valori di X a seconda che a destra abbiamo un multiplo pari o dispari . A questi due angoli corrispondono le due traiettorie descritte dal pentagono

regolare o da una stella a cinque punte formata dalle diagonali del pentagono regolare.
In (*i*) si chiede di determinare l'insieme dei punti per cui passa una traiettoria a 5 rimbalzi che riporta nel punto di partenza con lo stesso verso di uscita. Escluse le traiettorie degeneri, questo insieme coincide coi punti del biliardo per cui possiamo far passare un pentagono o una stella (notare che per dire questo si deve aver dimostrato che il pentagono e la stella sono ammissibili e che sono le uniche traiettorie con le proprietà richieste). Questo insieme coincide evidentemente con tutto il biliardo meno il cerchio inscritto nel piccolo pentagono generato dalla stella.
Per rispondere a (*ii*): siano y e z le distanze della stella e del pentagono, rispettivamente, dal centro O del biliardo. Per i punti che distano meno di y dal centro non ci sono traiettorie, come detto in (*i*). Per i punti che distano esattamente y dal centro avremo un'unica direzione (quella tangente alla circonferenza di raggio y centrata in O). Per i punti che distano fra y e z (estremi esclusi) passano due distinte stelle e nessun pentagono, dunque due direzioni. Per quelli che distano esattamente z avremo tre direzioni e per quelli che distano fra z ed il raggio del biliardo (estremi esclusi) passano due distinte stelle e due distinti pentagoni, quindi quattro direzioni. Per i punti del bordo del biliardo la risposta è ancora quattro, perché ciascuno di essi è vertice di un pentagono e di una stella.

Per completare la soluzione dell'esercizio dobbiamo dimostrare (*a*) e (*b*).
Dati tre punti A, B e C indichiamo con $|AB|$ la lunghezza del segmento di estremi A e B, con $\angle BAC$ l'ampiezza dell'angolo con vertice in A passante per B e C e con ABC il triangolo di vertici A, B e C.
Siano A, B e C tre vertici consecutivi in una stessa traiettoria. I due triangoli AOB e BOC hanno un lato in comune, cioè il segmento OB. Inoltre $|OA| = |OB| = |OC|$ = raggio del biliardo. Per concludere la dimostrazione basterà provare che $\angle ABO = \angle CBO$; e questo ce lo dice l'ipotesi che il biliardo sia ideale.

Domanda: come cambiano le risposte alle analoghe domande (*i*) e (*ii*) se invece di traiettorie a 5 lati si considerano traiettorie con un generico numero di lati?