Soluzioni della Gara Matematica 2005

1 Soluzione del primo esercizio

Tradurre il problema in termini formali

Nonostante la sua folkloristica espressione, il problema ha una semplice traduzione in termini matematici. D'ora in avanti chiamerò $[a\&b]$ il numero formato dalle cifre a e b, cioè $a \cdot 10 + b$. Nel nostro caso a e b dovranno essere numeri pari minori di 9, quindi per qualche n e m sarà $a = 2n$, $b = 2m$ e via dicendo. Se a e b sono minori di 9, m e n saranno compresi tra 0 e 4. Stiamo cercando numeri $[a\&b]$ e $[c\&d]$ composti da cifre pari tali che $[a\&b] \cdot [c\&d] = [b\&a] \cdot [d\&c]$. Diamoci da fare:

$$\begin{aligned}
[a\&b] \cdot [c\&d] &= [b\&a] \cdot [d\&c] \\
\big[(2n)\&(2m)\big] \cdot [(2k)\&(2j)] &= [(2m)\&(2n)] \cdot [(2j)\&(2k)] \\
\big[(2n) \cdot 10 + 2m\big] \cdot [(2k) \cdot 10 + 2j] &= [(2m) \cdot 10 + 2n] \cdot [(2j) \cdot 10 + 2k] \\
(n \cdot 10 + m) \cdot (k \cdot 10 + j) &= (m \cdot 10 + n) \cdot (j \cdot 10 + k) \\
99 \cdot mk &= 99 \cdot nj \\
mk &= nj
\end{aligned}$$

Questa è la condizione affinché una coppia di numeri abbia la proprietà richiesta: la chiamerò Condizione Fondamentale.

Fare i conti

Visto che m, n, k e j sono compresi tra 0 e 4 e che le coppie di numeri che stiamo cercando non sono "ordinate", basteranno $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ tentativi per trovarle tutte. Al lavoro:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 1 &= 1 \cdot 1 \Rightarrow (22, 22) \\
1 \cdot 2 &= 1 \cdot 2, 2 \cdot 1 \Rightarrow \ (24, 24),\ (24, 42) \\
1 \cdot 3 &= 1 \cdot 3, 3 \cdot 1 \Rightarrow \ (26, 26),\ (26, 62) \\
1 \cdot 4 &= 1 \cdot 4, 4 \cdot 1, 2 \cdot 2 \Rightarrow \ (28, 28),\ (28, 82),\ (42, 84) \\
\\
2 \cdot 2 &= 2 \cdot 2, 4 \cdot 1, 1 \cdot 4 \text{ (già trovata) } \Rightarrow \ (44, 44),\ (48, 24) \\
2 \cdot 3 &= 2 \cdot 3, 3 \cdot 2 \Rightarrow \ (46, 46),\ (46, 64) \\
2 \cdot 4 &= 2 \cdot 4, 4 \cdot 2 \Rightarrow \ (48, 48),\ (48, 84) \\
\\
3 \cdot 3 &= 3 \cdot 3 \Rightarrow \ (66, 66) \\
3 \cdot 4 &= 3 \cdot 4, 4 \cdot 3 \Rightarrow \ (68, 68),\ (68, 86) \\
\\
4 \cdot 4 &= 4 \cdot 4 \Rightarrow \ (88, 88)
\end{aligned}
$$

Dunque sono quasi tutte coppie "banali". Per coppia banale intendo un numero ripetuto due volte, oppure due numeri con le cifre invertite (ovviamente il prodotto invertendo le cifre non cambia!). Le uniche coppie "interessanti" sono $(42, 84)$ e $(48, 24)$; ovviamente l'una si ottiene dall'altra invertendo le cifre dei numeri.

Perchè solo due coppie interessanti?

Come ulteriore analisi, anche se il problema è già completamente risolto, potremmo indagare circa il motivo della presenza di solo due coppie interessanti. Prima di tutto definiamo con precisione cos'è una "coppia banale", poi cercheremo di "schivarle". Questo è il piano: mostrare che l'unico modo per produrre una coppia non banale è avere $m = k$, (o $n = j$, che è lo stesso), e che questo accade solo con le coppie $(42, 84)$ e $(48, 24)$.

Una coppia di numeri con cifre pari $([2m\&2n], [2k\&2j])$ risponde alla richiesta del problema se e solo se $mk = nj$.
Definizione (Coppia banale di primo tipo) Sono le coppie di numeri con cifre uguali, cioè in cui $m = n$ e $k = j$; visto che, per la Condizione Fondamentale, $m = n \Rightarrow k = j$, basta che sia $m = n$
Definizione (Coppia banale di secondo tipo) Sono le coppie di numeri con cifre invertite, cioè in cui $m = j$ e $n = k$; come osservato prima, anche qui è sufficiente che $m = j$

Dunque per avere una coppia non banale m deve essere diverso sia da n che da j. E se fosse $m = k$? Visto che stiamo parlando di numeri minori di 4, l'unico modo in cui ciò può avvenire è $m = k = 2$, il che implica per la Condizione Fondamentale che $n = 4$ e $j = 1$ o viceversa, e si hanno appunto le coppie $(42, 84)$ e $(48, 24)$.

2 Soluzione del secondo esercizio

Quante foto ritraggono Paolo e Giovanni insieme?

La risposta è nessuna, una oppure due.

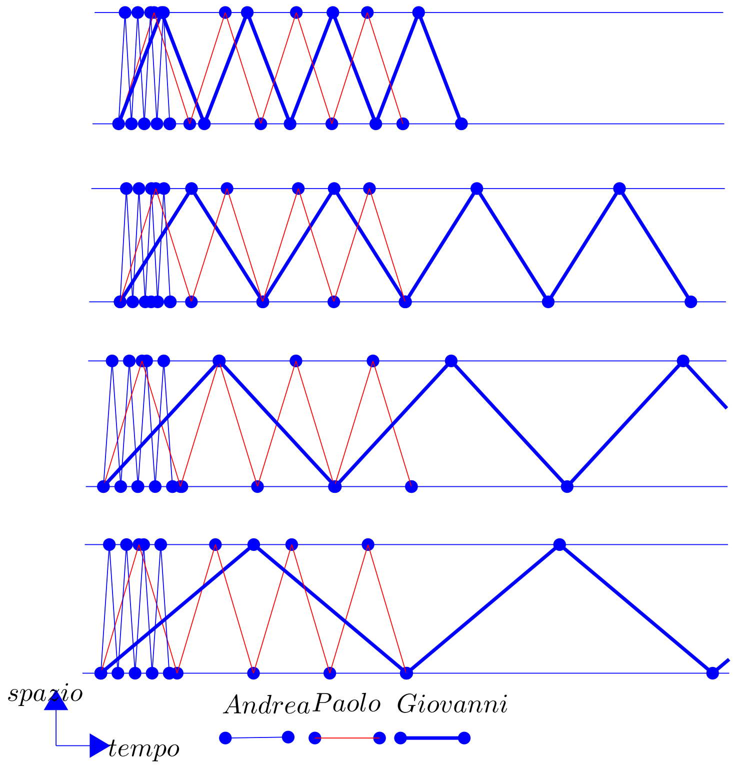

Figura 1: Le foto in cui Giovanni e Paolo sono due, una o nessuna

Il modo più rapido per dimostrarlo è quello grafico, usando dei grafici che rappresentano lo spazio percorso in funzione del tempo. Visto che le velocità sono costanti, ogni tragitto appare come una fisarmonica fatta da segmenti tutti con la stessa pendenza (in valore assoluto): segmenti con pendenza positiva indicano i tratti di "andata" e segmenti con pendenza negativa indicano tratti di "ritorno". Le linee orizzontali sono i bordi della piscina.

Si può supporre che Andrea sia stato velocissimo, e che abbia completato il tragitto prima ancora che Paolo o Giovanni abbiano fatto una sola vasca. Quindi si può tracciare il percorso di Paolo, arrivato secondo, e tenerlo fisso.

La "variabile" è quindi il percorso di Giovanni. Contraendo o espandendo la sua fisarmonica si hanno tutte le soluzioni possibili, che sono rappresentate in Figura 1. Il grafico più in alto rappresenta uno dei casi in cui non ci sono fotografie con Paolo e Giovanni insieme; gli altri grafici sono ottenuti supponendo che si incontrino almeno una volta, rispettivamente la seconda, la terza o la quarta volta che Paolo completa la vasca. Paolo e Giovanni non possono incontrarsi quando Paolo ha completato la prima vasca, altrimenti Giovanni avrebbe una velocità maggiore o uguale a quella di Paolo, mentre invece sappiamo che è arrivato ultimo.

Qual'è il numero minimo possibile di foto?

La risposta è 8. Anche stavolta utilizzare i *grafici-piscina* è il modo migliore per cavarsi d'impiccio. Il testo dice che Andrea arriva primo, Paolo secondo e Giovanni ultimo. Quindi Paolo deve completare la sua prima vasca *dopo* che l'ha fatto Andrea, e lo stesso vale per Giovanni nei confronti di Paolo. Affinché il numero di scatti sia minimo occorre imporre più coincidenze possibili, quindi Paolo deve completare

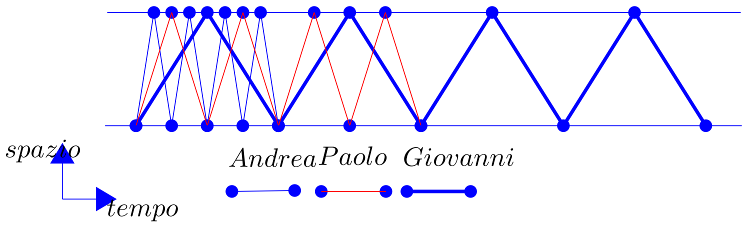

Figura 2: Il minimo numero possibile di fotografie è 8

la sua prima vasca quando Andrea ha completato la seconda (e conseguentemente completerà la seconda quando Andrea finisce la gara, perchè le velocità sono costanti). Per lo stesso motivo bisogna far sì che gli arrivi di Giovanni coincidano il più possibile con quelli degli altri. Ciò può essere realizzato con la situazione in Figura 2 oppure se il suo primo arrivo coincide con la fine della terza vasca di Andrea ed il suo secondo arrivo coincide con la fine della terza vasca per Paolo.

3 Soluzione del terzo esercizio

Quanti vestiti di ciascun tipo per avere il massimo guadagno?

la risposta è 5 vestiti da uomo e 3 vestiti da donna.

La procedura da seguire consiste in due passi: prima dobbiamo individuare il dominio delle coppie di numeri $(\#vestiti\_uomo, \#vestiti\_donna)$ che il sarto può ottenere, successivamente elaboreremo una strategia per individuare la coppia più vantaggiosa.

Il dominio delle coppie

Chiamo x il numero di vestiti da uomo e y il numero di vestiti da donna. Il testo del problema, tradotto in questi termini, ci impone che:

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 16 \text{ (condizione sul cotone)} \\ x + 2y &\leq 11 \text{ (condizione sulla seta)} \\ x + 3y &\leq 15 \text{ (condizione sulla lana)} \end{aligned}$$

Se a questo aggiungiamo il fatto che il sarto non può fabbricare un numero negativo di vestiti, abbiamo ben cinque rette che delimitano la regione del piano cartesiano da cui x e y non possono uscire (Fig. 3). Ricordo che ci interessano solo i valori interi (o *discreti*) di x e y.

Come leggere il grafico del dominio?

Cè una sola regola, ed è molto intuitiva: *se un punto (x_1, y_1) sta più in alto o più a destra di un altro punto (x_2, y_2), tale punto garantisce un guadagno maggiore dell'altro.*

È chiaro! Spostarsi più in alto o più a destra significa produrre più vestiti; basta non uscire dal dominio. Quindi i punti migliori sono quelli sulla parte di bordo costituito dalle rette che abbiamo individuato sopra. Sono solo cinque, e controllandoli tutti si scopre che la combinazione migliore è quella con 3 vestiti da donna e 5 vestiti da uomo, per un guadagno di 3000 Euro.

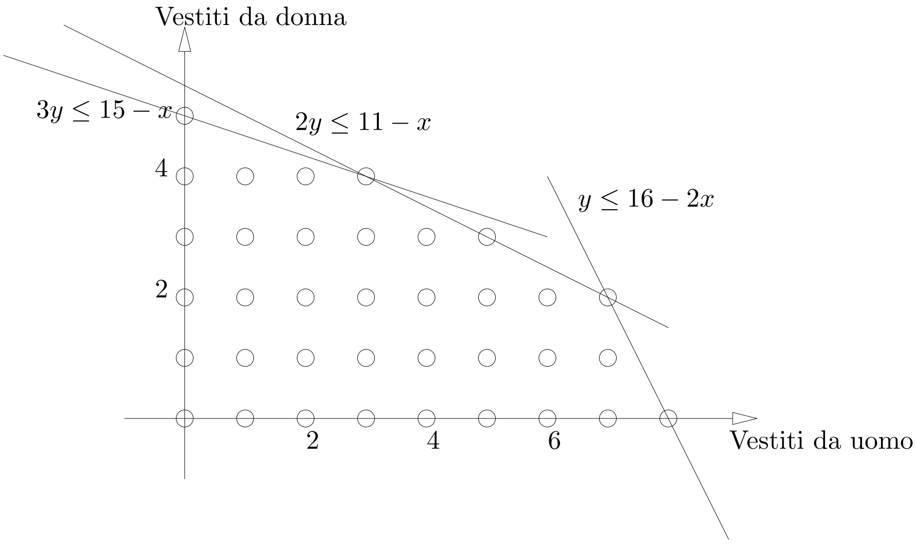

Figura 3: I vincoli del sarto rappresentati sul piano cartesiano

Soluzione del quarto esercizio

Quale deve essere il raggio della quinta pallina?

La risposta è $5(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1)$. Consideriamo i centri delle prime quattro sfere: essi sono disposti nello spazio come i vertici di un tetraedro di spigolo 10. Per dimostrare che il raggio della quinta pallina è $5(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1)$ dovremo innanzi tutto convincerci che il suo centro coincide con il baricentro del tetraedro. Successivamente calcoleremo la distanza del baricentro da un vertice, e sottrarremo 5 da questa quantità: avremo ottenuto il raggio della quinta pallina.

Il centro della quinta pallina è nel baricentro del tetraedro

Consideriamo il segmento che congiunge il centro della quinta sfera con uno tra i centri delle altre quattro sfere, ossia con uno tra i vertici del tetraedro. Esso è la somma del raggio che stiamo cercando e del raggio di un'altra sfera. Questa quantità è costante, qualunque sia il vertice considerato: ne segue che il centro della quinta pallina è equidistante dai vertici del tetradro, dunque ne è il baricentro. In questa argomentazione faccio forte uso delle simmetrie di cui gode il tetraedro: in generale non è affatto vero che il baricentro di un solido è equidistante dai suoi vertici!

Alla ricerca del baricentro del tetraedro

Come abbiamo appena osservato, la distanza del baricentro dai vertici è la somma del raggio della quinta pallina e di quello di una delle sfere uguali. Dunque calcolando questa distanza e sottraendovi 5 arriveremo al raggio che cerchiamo.

Visto che abbiamo tra le mani un tetraedro, le sue altezze passano per il baricentro collegando un vertice al baricentro della faccia opposta. L'obiettivo è scoprire quanto sono lunghi i segmenti in cui il baricentro divide l'altezza.

Consideriamo il piano individuato da un'altezza e uno spigolo del tetraedro. La sezione che questo piano "stacca" sul tetraedro ha la forma di un triangolo isoscele (Figura 5): i lati uguali tra loro sono le altezze di due facce del tetraedro, e sono lunghi $l\frac{\sqrt{3}}{2}$ (AB e BC in figura), mentre il lato AC è lungo l: come in tutti i trangoli

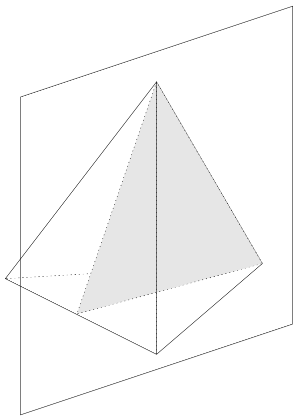

Figura 4: Il piano individuato da uno spigolo e un'altezza

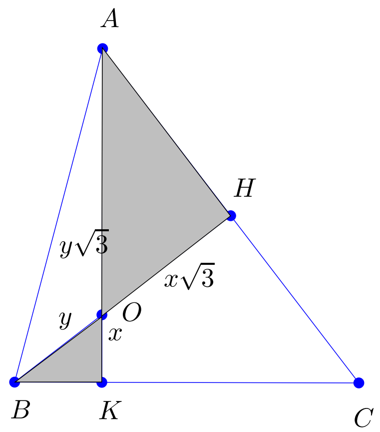

Figura 5: La sezione ottenuta col piano di Figura 4

isosceli, questo terzo lato è diviso a metà dalla sua altezza, che chiamiamo BH e calcoliamo immediatamente col teorema di pitagora:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = l\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Adesso possiamo calcolare l'area di questo triangolo e quindi una delle altre due altezze, diciamo AK:

$$\begin{aligned} Area &= \frac{AC \cdot BH}{2} = l^2\frac{\sqrt{2}}{4} \\ AK &= \frac{Area \cdot 2}{BC} = l\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Con un ultimo sforzo calcoliamo il segmento BK usando il nuovamente il teorema di pitagora sui nuovi elementi che abbiamo ottenuto

$$BK = \sqrt{BA^2 - AK^2} = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = l\frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'obiettivo di questi noiosi calcoli è quello di trovare AH e BK; osservando attentamente la figura si scopre che essi sono lati corrispondenti dei due triangoli simili AHO e BKO (notare gli angoli retti e gli angoli opposti al vertice). Dividendo l'uno per l'altro si scopre che il rapporto di similitudine è $\sqrt{3}$.

Ricordo che il centro di una delle quattro sfere è in A, mentre il centro della quinta sfera è in O: visto che queste due sfere si toccano, AO è la somma dei loro raggi e la soluzione dell'esercizio sarà il valore $AO - 5$. Se chiamo x il segmento KO e y il segmento BO, sfruttando il rapporto di similitudine e la conoscenza delle due altezze del triangolo isoscele che stiamo studiando, posso scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + \sqrt{3}y = l\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{3}x + y = \frac{l}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $\sqrt{3}$ e sottraendo la seconda dalla prima si scopre che $AO = \sqrt{3}y = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Visto che $l = 10$, il raggio della quinta pallina è $5(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1)$.

La parte sostanziale del problema consiste nel capire dove si posiziona il baricentro del tetraedro rispetto ad un'altezza. Esiste un modo veramente brillante per venire a capo della questione: chiamata h l'altezza del tetraedro e x la distanza del baricentro G da ognuna delle facce, consideriamo i quattro tetraedri uguali (non regolari) che hanno vertice comune in G e base su ognuna delle facce del tetraedro di partenza. Se S è l'area di base, basta considerare il volume:

$$4\frac{Sx}{3} = \frac{Sh}{3}$$

Dunque $x = \frac{h}{4}$.
Questa elegante dimostrazione è apparsa ad Aprile 2006 sul forum
http://olimpiadi.ing.unipi.it/oliForum, il nickname dell'autore è BMcKmas.