Soluzioni della Gara Matematica 2006

1 Soluzione del primo esercizio

Quanti potevano essere i cavalieri presenti alla cena?

I cavalieri potevano essere quattro, dodici oppure poteva non esserci alcun cavaliere.

Si comincia con l'osservare che la presenza di un cavaliere implica la presenza di un furfante; al contrario, la presenza di un furfante non richiede quella di un cavaliere. Questo ci porta a concludere che una delle configurazioni possibili è costituita dalla tavola con soli furfanti.

Supponiamo invece che tra i commensali vi fosse almeno un cavaliere. Egli poteva avere due cavalieri accanto ed un furfante di fronte oppure il furfante poteva stargli accanto come descritto in Figura 1; che il furfante stesse a destra o a sinistra non importa, per la simmetria del problema.

Adesso possiamo procedere a macchinetta esplorando tutti i casi possibili, oppure fare un'ipotesi di lavoro che semplificherà molto il resto della soluzione: dapprima supponiamo che tutti i furfanti abbiano di fronte un furfante (magari non esiste alcuna configurazione di questo tipo, ma noi ci proviamo); successivamente analizziamo il caso opposto, ossia quello in cui esiste almeno un furfante che ha di fronte un cavaliere.

Supporre che tutti i furfanti abbiano di fronte un furfante ci porta necessariamente al Caso A di Figura 1; la negazione di questa ipotesi ci porta, *a meno di non dover ruotare la tavola*, al Caso B.

- Caso A Per la regola che impone il problema, il cavaliere "isolato" dovrà avere accanto un cavaliere ed un furfante. Se non fosse così, dato che egli ha di fronte un altro cavaliere, starebbe mentendo. Siccome stiamo supponendo che ogni furfante abbia di fronte un furfante, alla sinistra del cavaliere "isolato" sta un furfante, e a destra invece c'è un altro cavaliere. Da questo punto in

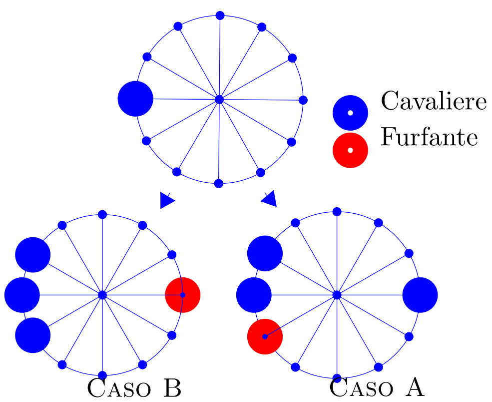

Figura 1: Nel caso ci sia almeno un cavaliere

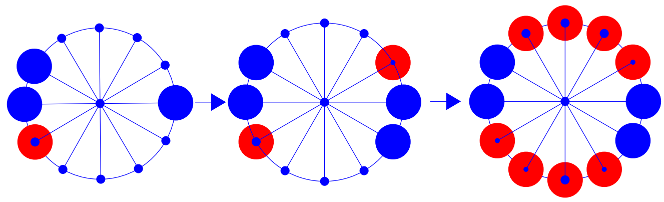

Figura 2: Ogni furfante ha davanti un furfante

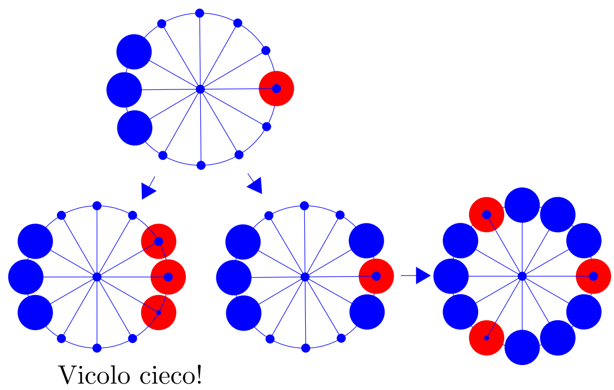

Figura 3: Esiste un furfante che ha davanti un cavaliere

poi la regola del problema ci porta direttamente (ed univocamente) ad una soluzione (Fig. 2).

- Caso B Supponiamo che almeno un furfante abbia un cavaliere di fronte. Chiaramente questo cavaliere avrà due cavalieri ai lati. Quindi siamo nel Caso B di Figura 1. Adesso possiamo scegliere chi mettere ai lati del furfante, cioè due cavalieri oppure due furfanti (altrimenti avrebbe detto la verità!). La seconda opzione però conduce presto ad un vicolo cieco, quindi ai lati del furfante devono stare due cavalieri. D'ora in avanti la strada è segnata: si ha una sola scelta per ogni posto, e si ottiene la terza soluzione (Fig. 3).

2 Soluzione del secondo esercizio

L'innesco

Visto che la pavimentazione non cambia una volta fatta la sostituzione e che Bastiano comincia a sostituire dalla mattonella in alto a sinistra, la mattonella in alto a sinistra deve essere bianca. Questo dice anche come sono fatte le mattonelle intorno: Bastiano trova la mattonella bianca, la sostituisce e rivela altre tre mattonelle del disegno di Martino, visto che il suo operato non altera la pavimentazione. Bastiano continua a sostituire, e ad ogni passo scopre altre tessere del disegno originale. Quindi per risalire al disegno di Martino basta applicare la sostituzione di Bastiano alla prima mattonella, che è bianca, poi a quelle ottenute e così via.

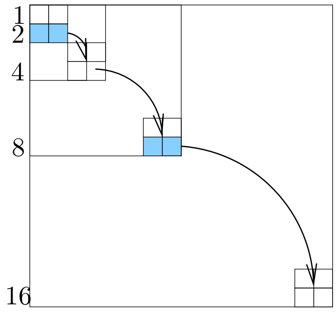

Figura 4: Schema della soluzione diagonale

La soluzione diagonale

La mattonella in basso a destra è nera.
Il modo più rapido di dimostrarlo è quello di fare indagini “in diagonale”. Se la prima mattonella in alto ha coordinate $(1, 1)$, una qualsiasi mattonella in posizione (m, n) “produce” un quadrato di due mattonelle per due con la casella in alto a sinistra nella posizione $(2m - 1, 2n - 1)$. Si osserva che, per come è definita la sostituzione, questo quadrato ha la mattonella in basso a destra di colore diverso da quello della mattonella che l’ha generato: seguendo le tracce delle “mattonelle in basso a destra” si ha che ad ogni salto il colore della mattonella cambia (Figura 4).
Se la piazza ha per lato un numero di mattonelle che è una potenza di 2, per potenze pari si ha che la mattonella in basso a destra è bianca, per potenze dispari è nera.
Siccome $128 = 2^7$, la mattonella è nera.

La soluzione verticale

Un altro modo per scoprire che la mattonella in basso a destra è nera consiste nell’osservare che le righe della pavimentazione sono composte da mattonelle tutte dello stesso colore; si può quindi studiare la prima colonna della pavimentazione e scoprire di che colore è l’ultima mattonella.
Per dimostrare che le righe hanno un solo colore si prende una mattonella (m, n) qualsiasi e ci si chiede se la mattonella accanto, di coordinate $(m, n+1)$, ha lo stesso colore. Se n è pari, le due mattonelle sono state generate dalla stessa mattonella, e quindi sono dello stesso colore. Se invece n è dispari, una condizione sufficiente affinché siano dello stesso colore è che la mattonella che ha generato quella in (m, n) ne avesse accanto una dello stesso colore a sua volta. Il punto fondamentale è notare che la mattonella che ha generato quella in (m, n) ha coordinate $(\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)$, cioè è *più in alto e più a sinistra* ($\lfloor a \rfloor$ indica il più grande intero minore o uguale ad a). Quindi risalendo la genealogia della nostra mattonella arbitraria si arriva necessariamente al quadrato due per due in alto a sinistra, in cui ogni mattonella ne ha accanto una dello stesso colore.
Adesso il problema è stato ricondotto allo studio della prima colonna. Con osservazioni analoghe a quelle fatte per lo studio della diagonale si nota che, facendo cominciare la numerazione delle mattonelle da 1, nei posti corrispondenti a potenze di 2 si alternano mattonelle bianche e nere. Siccome a potenze dispari di 2 corrispondono mattonelle nere, l’ultima in basso è nera.

Curiosità

La piazza infinita

La prima cosa interessante da notare è che se la piazza dell'esercizio avesse avuto estensione infinita, Bastiano non avrebbe dovuto adottare la macchinosa regola di interrompere la sostituzione ad un quarto del totale.

Notazione formale

Attenzione: a differenza di come si è fatto fino qui, d'ora in avanti la numerazione dei posti delle sequenze partirà da 0.
Sia studiando la prima colonna che la diagonale della piazza, si ha a che fare con una sostituzione unidimensionale su due lettere (al posto dei colori bianco e nero, d'ora in avanti si useranno le lettere a e b rispettivamente). Se $A = \{a, b\}$ e A^* è l'insieme delle parole ottenibili dalle lettere a e b, la sostituzione è una funzione $\sigma : A^* \to A^*$ definita da $\sigma(a) = ab$ e $\sigma(b) = aa$. La funzione si estende naturalmente a più lettere concatenando le singole immagini, i.e. $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) = abaa$. La sequenza delle piastrelle della prima colonna, come quella della diagonale, è data dalle prime 128 lettere della sequenza u invariante alla sostituzione σ, cioè tale che $\sigma(u) = u$. Analogamente all'intera piazza, u si costruisce iterando σ all'infinito, partendo dalla lettera a.

La sequenza non è periodica

La sequenza u così definita gode di una interessante proprietà: la lettera di posto $2n+1$, più brevemente u_{2n+1}, è sempre diversa da u_n (ricordo che i posti si contano a partire da 0). La dimostrazione è immediata: la "doppietta" $u_{2n}u_{2n+1}$ contiene l'immagine di u_n, quindi se $u_n = a$ allora $u_{2n+1} = b$ e se $u_n = b$ allora $u_{2n+1} = a$. Il fatto che nei posti corrispondenti a potenze di 2 (o meglio, visto che la prima lettera occupa il posto 0, nei posti $2^n - 1$) si alternino mattonelle bianche e nere è un caso particolare di questa proprietà. Questo fatto garantisce che la sequenza non è periodica, cioè che non esiste un numero T per cui $u_{n+T} = u_n$ qualunque sia n: infatti se u_{n+n+1} è diversa da u_n significa che $n+1$ non può essere il periodo, e visto che $n+1$ può essere qualunque numero, il periodo non c'è.

L'automa della sequenza

Le immagini di a e b attraverso σ hanno la stessa lunghezza: due lettere ciascuna. Ogniqualvolta si presenti questa situazione, è possibile costruire un algoritmo che consente di conoscere la lettera u_n dato un qualunque numero n senza dover scrivere per intero la sequenza. Questo algoritmo è basato su un grafo chiamato *l'automa della sequenza*. Per disegnarlo si considerano le singole lettere $\sigma(a)$ e $\sigma(b)$, nel senso che $\sigma_i(a)$ indica la $i+1$–esima lettera di $\sigma(a)$:

$$\sigma_0(a) = a, \quad \sigma_1(a) = b, \quad \sigma_0(b) = a, \quad \sigma_1(b) = a$$

Il grafo è costituito da due vertici, ognuno associato ad una lettera. Da ogni vertice partono due frecce, numerate con 0 e 1; la freccia i che parte da a è diretta verso $\sigma_i(a)$, e altrettanto per la lettera b (Figura 5).

Adesso è possibile scoprire quale lettera occupa il posto n senza dover costruire esplicitamente la sequenza. Ecco la ricetta:

1. Scrivere n in base 2

2. Percorrere il grafo partendo da a, seguendo successivamente le frecce che corrispondono alle cifre di n in base 2, lette da sinistra verso destra.

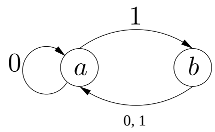

Figura 5: L'automa della sequenza u

Pura magia? No, la ragione per cui questo algoritmo funziona è semplice: se n_i sono le cifre dello sviluppo di n in base 2, $n = \sum_{i=0}^{j} n_i 2^i$. Si comincia da $u_0 = a$, quindi si va alla $n_j + 1$–esima lettera di $\sigma(u_0)$, che chiamiamo l_1, quindi si va alla $n_{j-1} + 1$–esima lettera di $\sigma(l_1)$, che è anche la $2n_j + n_{j-1} + 1$–esima lettera di $\sigma^2(u_0) = \sigma(\sigma(u_0))$, e, dopo j passi, si arriva alla $n + 1$–esima lettera di $\sigma^{j+1}(u_0)$, che è u_n.

Una partizione dei numeri naturali

Alla sequenza u si può associare una partizione dei numeri naturali in due insiemi $\mathbb{N}_a$ e $\mathbb{N}_b$: da una parte i numeri al cui posto nella sequenza c'è una a, dall'altra i numeri al cui posto compare una b. La domanda è: si possono caratterizzare $\mathbb{N}_a$ e $\mathbb{N}_b$ in base a qualche proprietà dei numeri? La risposta è sì, e dall'automa della sequenza risulta evidente che gli a–numeri e i b–numeri verranno distinti da una qualche proprietà del loro sviluppo in base 2. Infatti si ha che $\mathbb{N}_a$ è costituito da quei numeri tali che l'ultimo 0 a partire da sinistra nella loro scrittura in base 2 è seguito da un numero pari di 1, mentre i b–numeri dopo l'ultimo 0 hanno un numero dispari di 1. Questa caratterizzazione si estende naturalmente ai numeri che in base 2 finiscono con 0 e ai numeri con privi di 0 nel loro sviluppo bi-adico (che sono i numeri coinvolti nella soluzione dell'esercizio). Per convincersene basta fare qualche esperimento con l'automa. Una caratterizzazione equivalente che (apparentemente) non coinvolge la scrittura in base 2 è la seguente:

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_a &= \{2^{2m+1}n + 2^{2m} - 1 \mid m, n \in \mathbb{N}\}\\ \mathbb{N}_b &= \{2^{2m+2}n + 2^{2m+1} - 1 \mid m, n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

Si può darne anche una caratterizzazione più "folkloristica": immaginando di avere di fronte tutti i numeri naturali da 0 in poi e di voler mettere sopra ogni numero la lettera che gli compete nella sequenza u, la regola è semplice (ma purtroppo si compone di infiniti passi).
Cominciando da 0, ad un numero ogni due corrisponde una a.
Di quelli che restano, ad un numero ogni due corrisponde una b.
Di quelli che restano, ad un numero ogni due corrisponde una a.
Di quelli che restano, ad un numero ogni due corrisponde una b.
Di quelli che restano, ad un numero ogni due corrisponde una a, e così via ...

Riferimenti

Se questo problema ti è piaciuto, probabilmente apprezzerai anche il problema di Marzo 2006 della rubrica "Monthly Problem" curata dall'Università della città di Regina, in Canada. Le sostituzioni sono un argomento ricco di sviluppi, anche recenti. Anche se si tratta di un testo piuttosto avanzato, ho trovato molto interessante questo libro:

N. Pytheas-Fogg • Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics • Lectures Notes in Mathematics 1794 • Springer-Verlag, 2002

3 Soluzione del terzo esercizio

NOTA: Nella discussione che segue le terne saranno considerate, ovviamente, *non ordinate*. Questo significa che scrivendo la terna (a, b, c) ci si riferisce anche e indifferentemente a (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a) e così via.

Si può ottenere la terna $(11, 30, 40)$?

La risposta è no.

Prima di iniziare la discussione della soluzione a questo esercizio, è comodo introdurre il concetto di congruenza modulo un certo numero. Non è indispensabile, ma rende l'esposizione più spedita.
Consideriamo, ad esempio, la congruenza modulo 3: si dice che due numeri interi hanno la stessa congruità modulo 3 se, divisi per 3, danno lo stesso resto. Per esempio, 4 e 72 hanno la stessa congruità modulo 3 (oppure: *sono congrui modulo* 3), perché entrambi divisi per 3 danno resto 1, mentre non hanno la stessa congruità modulo 3 di 5, perché 5 diviso 3 dà resto 2.
Occorre notare che i possibili resti di una divisione per 3 sono soltanto 0, 1 oppure 2: non ci sono altre possibilità. L'aritmetica delle congruenze è spesso chiamata *aritmetica dell'orologio*.

Le operazioni consentite nel gioco di Emanuele sono:

- OPERAZIONE DI TIPO 1 Togliere due palline da un'urna e distribuirle nelle altre due
- OPERAZIONE DI TIPO 2 Togliere tre palline da un'urna e metterle via

Il gioco comincia con trenta palline in ciascuna delle urne. La prima osservazione da fare è questa: ogni volta che Emanuele effettua una delle due operazioni, le quantità di palline presenti nelle urne dopo la mossa saranno sempre tre numeri *congrui* tra loro modulo 3, cioè dividendo per 3 ognuno di questi numeri si ottiene sempre lo stesso resto.

Ciò non significa che *durante tutto il gioco* il valore del resto della divisione per 3 del numero di palline presenti, ad esempio, nella prima urna si mantenga costante; significa solamente che *dopo un qualunque turno*, andando a contare le palline presenti in ciascuna urna, si troverebbero tre valori congrui tra loro modulo 3.
Come mai accade questo?

Siano a, b e c le quantità di palline presenti nelle urne in un certo momento del gioco, e supponiamo che siano congrui tra loro modulo 3: ciò significa che qualunque sia il loro quoziente nella divisione per 3, il resto è uguale per tutti, ossia:

$$\begin{aligned} a &= 3q_1 + r \\ b &= 3q_2 + r \\ c &= 3q_3 + r \end{aligned}$$

Supponiamo che Emanuele scelga di effettuare una operazione di tipo 1 estraendo due palline dall'urna C. Al turno successivo nelle urne si avrebbero:

$$\begin{aligned} a + 1 &= 3q_1 + r + 1 \text{ nella prima urna} \\ b + 1 &= 3q_2 + r + 1 \text{ nella seconda urna} \\ c - 2 &= 3q_3 + r - 2 + 3 - 3 = 3(q_3 - 1) + r + 1 \text{ nella terza urna} \end{aligned}$$

Come si vede, in ogni caso il nuovo resto è $r + 1$, ed i tre numeri sono di nuovo congrui tra loro modulo 3. Non dovrebbe essere difficile convincersi che anche nel caso di una operazione di tipo 2, al turno successivo si hanno tre numeri nuovamente congrui tra loro.
Questo ragionamento afferma la *permanenza* di una certa situazione (la congruità modulo 3) se vengono effettuate le due operazioni consentite. Osservando che *all'inizio* si aveva congruità modulo 3 (30, 30 e 30 sono tre numeri congrui), la dimostrazione è completata.

La terna $(11, 30, 40)$ è "producibile"? Certamente no, perché 11 è congruo a 2 modulo 3, 30 è congruo a 0 e 40 è congruo a 1.

Descrivere tutte le possibili configurazioni

La seconda domanda richiede un'analisi ben più sofisticata: ci viene chiesto di *caratterizzare* tutte le terne producibili, cioè di esibire un algoritmo in grado di riconoscere ad occhio se una data terna è "raggiungibile" oppure no.

La risposta è: tutte le terne composte da numeri congrui modulo 3 la cui somma è inferiore o pari a 90, eccetto $(90, 0, 0)$, sono producibili.

Abbiamo appena scoperto che *se* una terna è producibile, *allora* è composta da numeri congrui tra loro. Questa può essere una buona ipotesi di lavoro (e scopriremo che è quasi la risposta giusta), ma non è abbastanza. Per esempio, ancora non sappiamo se la terna $(90, 0, 0)$ è producibile; in effetti non lo è, benché sembri plausibile che lo sia.
Dobbiamo rispondere a questa domanda: è vero che *se* una terna è composta da numeri congrui *allora* è producibile?

La terna $(90, 0, 0)$ non è producibile

Supponiamo che ad un certo punto del gioco Emanuele sia arrivato alla terna $(90, 0, 0)$. Qual'è stata la mossa precedente? Chiaramente non ha mai tolto palline dalle urne, quindi la mossa precedente è stata necessariamente una operazione di tipo 1, prelevando due palline, diciamo, dall'urna B. Dove le ha messe? Necessariamente una pallina è andata in A ed una in B. Ehi! supponevamo di avere tra le mani la terna $(90, 0, 0)$, e ci ritroviamo invece la terna $(88, 1, 1)$. Questa è una contraddizione e nel Mondo della Matematica, a differenza del Mondo Reale, le contraddizioni non possono esistere, quindi $(90, 0, 0)$ è una terna impossibile.

Chiaramente la terna con i numeri più piccoli che si può avere è $(0, 0, 0)$, ottenuta con operazioni di tipo 2 su tutte le urne.

L'idea del ragionamento

Per giustificare la risposta, procederemo all'indietro, partendo da una ipotetica configurazione finale (cioè con i requisiti descritti sopra), e mostreremo che effettuando le operazioni inverse a quelle di tipo 1 e 2 si può arrivare alla configurazione iniziale $(30, 30, 30)$.

Purtroppo la strategia che ho in mente non funziona con terne finali che presentano due zeri, e questo caso andrà trattato a parte.

Le terne con due urne vuote

Cerchiamo di studiare un caso particolare: quello delle configurazioni con due urne vuote, cioè terne con due zeri. Innanzi tutto osserviamo che se in due urne ci sono 0 palline, nella terza deve esserci un numero di palline moltiplo di 3. Consideriamo il caso in cui nella terza urna c'è un numero di palline compreso tra 0 e 30: si tratta di una configurazione possibile? Certamente, perché è raggiungibile effettuando solo operazioni di tipo 2, portando a zero il contenuto delle prime due urne e togliendo un opportuno numero di palline dalla terza urna.

Se invece nella terza urna vogliamo più di trenta palline, dobbiamo farci più accorti e definire una nuova operazione, che sia ovviamente composta dalle operazioni di tipo 1 e 2:

Operazione di Tipo 3 (Operazione Composta) Consente di trasportare in blocco tre palline dall'urna A all'urna B, a patto che nell'urna C vi sia almeno una pallina. Per avere un'operazione di tipo 3 bisogna effettuare un'operazione di tipo 1 sull'urna A, quindi un'operazione di tipo 1 sull'urna C, quindi un'altra operazione di tipo 1 sull'urna A. Ecco come funziona:

$$\begin{array}{rc}
(a, b, c) & \text{configurazione iniziale} \\
(a-2, b+1, c+1) & \text{operazione 1 su A} \\
(a-1, b+2, c-1) & \text{operazione 1 su C} \\
(a-3, b+3, c) & \text{operazione 1 su A}
\end{array}$$

Come si vede, alla fine l'effetto è quello di un trasporto di tre palline da A a B, ma ad un certo punto è stato necessario che C non fosse vuota.

Vediamo come usare questa nuova operazione per produrre terne in cui al primo posto c'è un multiplo di 3 maggiore di 30, mentre le urne B e C sono vuote.

Il trucco è spostare blocchi di tre palline alternativamente da B in A, poi da C in A. L'alternanza è necessaria affinché B e C si svuotino il più tardi possibile: ricordiamoci che è sempre necessaria un'urna d'appoggio non vuota. Ecco l'evoluzione dei turni:

$$\begin{array}{rl}
(30, 30, 30) & \\
(33, 30, 27) & \\
(36, 27, 27) & \\
(39, 27, 24) & \\
(42, 24, 24) & \\
\dots & \\
(87, 3, 0) & \text{manca l'urna di appoggio, non possiamo continuare}
\end{array}$$

Ci si può fermare in ogni momento, svuotando le B e C a suon di operazione di tipo 2, ma se proprio si vuole arrivare fino in fondo si riscopre che la terna $(90, 0, 0)$ non è producibile.

Terne con al massimo un'urna vuota

Adesso che il caso con due urne vuote è sistemato si può procedere alla dimostrazione completa di questo fatto: *qualunque terna di numeri congrui tra loro modulo* 3 *la cui somma non superi* 90 *è producibile nel gioco di Emanuele, a patto che non si tratti della terna* $(90, 0, 0)$.

Un modo per dimostrare che una precisa terna con i requisiti di cui sopra, diciamo $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$, può essere prodotta, è partire dalla terna stessa e mediante le operazioni inverse a quelle di Emanuele mostrare che si può arrivare alla configurazione iniziale $(30, 30, 30)$.

Questo è il piano: partire da $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$, quindi arrivare ad una situazione di "parità", cioè ad una terna di numeri uguali, quindi aggiungere palline finchè non si giunge a $(30, 30, 30)$. Notiamo che la somma di tre numeri tra loro congrui modulo 3 è un multiplo di 3, quindi il programma di realizzare l'equilibrio tra le palline presenti alla fine del gioco ha buone speranze di riuscita.

Per far ciò bisogna prima definire le operazioni inverse:

Operazione di Tipo 1 Inversa Si prende una pallina da un'urna, una pallina da un'altra urna, e le si mette nella terza urna. Ovviamente le prime due urne non devono essere vuote.
Operazione di Tipo 2 Inversa Dal deposito delle palline buttate via mediante operazioni di tipo 2, si prendono tre palline e le si mettono in un'urna a scelta.

Mentre "percorriamo il labirinto al contrario", cioè partiamo dal fondo per arrivare all'inizio per scoprire qual'è la strada giusta, avremo bisogno anche dell'operazione di tipo 1, che apparentemente non è un'operazione inversa. Invece, sorprendentemente, prendere due palline da un'urna e distribuirle nelle altre due può essere fatto componendo le operazioni inverse appena definite; è però necessario che almeno una delle due urne in cui andiamo a mettere la pallina non sia vuota (e, ovviamente, che l'urna da cui intendiamo prendere le due palline contenga almeno due palline!).

Operazione di Tipo 1 (Ottenuta Inversamente) Consente di prendere due palline da A e metterle in C e B, a patto che C non sia vuota. Prima occorre prendere una pallina da A e una da C e metterle in B (operazione di tipo 1 inversa), quindi bisogna fare lo stesso prendendo palline da A e da B e mettendole in C. Funziona così:

$$\begin{array}{rc} (a, b, c) & \text{configurazione iniziale} \\ (a-1, b+2, c-1) & \text{operazione 1 inversa} \\ (a-2, b+1, c+1) & \text{operazione 1 inversa} \end{array}$$

Ora che abbiamo preparato tutti gli strumenti necessari, sui può passare alla strategia finale.

- Passo 1 Considerare il numero più grande tra $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$; supponiamo sia $\overline{a}$. Se vale $\overline{a} = \overline{b}$ oppure $\overline{a} = \overline{c}$ ma non entrambe, andare direttamente al Passo 2. Se invece i tre numeri sono tutti uguali, andare direttamente al Passo 3. Altrimenti, supponiamo che sia $\overline{a} > \overline{b} > \overline{c}$. Eseguire ripetutamente l'operazione di tipo 1 (ottenuta inversamente) prelevando palline da A. Notare che possiamo usare una tra B e C come urna di appoggio, perché non sono entrambe vuote: quel caso lo abbiamo trattato a parte. Notiamo che la differenza tra due numeri congrui modulo 3 è un multiplo di tre, e che le operazione di tipo 1 appena descritte riducono il dislivello tra A e B di tre palline alla volta. Anche le palline in C aumenteranno via via, ma non supereranno mai quelle delle altre urne.

  Se $a - b = 3k$, dopo k operazioni di tipo 1 le urne A e B saranno in equilibrio.

- Passo 2 A questo punto sarà vero, per un qualche numero j, che $a - c = b - c = 3j$. Quindi con j esecuzioni dell'operazione di tipo 1 **inversa**, che prende una pallina da A e una da B e le mette in C, si arriva alla parità tra le palline contenute nelle urne.

- Passo 3 Se durante il gioco Emanuele aveva eseguito qualche volta l'operazione di tipo 2, significa che alcune palline sono fuori dalle urne, in quantità

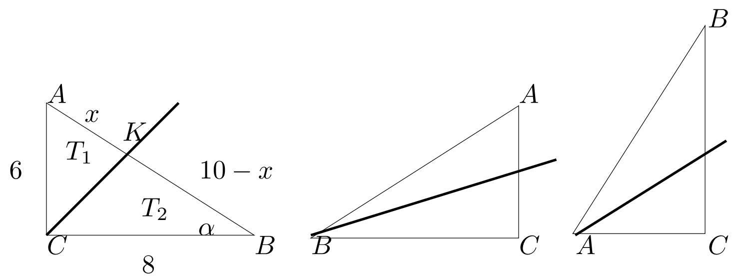

Figura 6: I casi in cui la retta passa da un vertice del triangolo

multipla di 3. Il nostro obiettivo è prendere una tripletta di palline alla volta, e metterne una in ogni urna. Non vogliamo certo perder l'equilibrio tanto faticosamente ottenuto! Come fare? Semplice: l'effetto desiderato si ottiene eseguendo l'inversa dell'operazione di tipo 2, quindi l'operazione di tipo 1 **ottenuta inversamente**, cioè mettendo tre palline dentro un'urna e subito dopo prendendo due di queste e distribuendole tra le altre urne. Se le palline fuori dalle urne sono $3h$, questa combinazione è da ripetere per h volte.

Il certificato per le terne producibili

Riconducendo ogni terna di un certo tipo alla configurazione iniziale, abbiamo eseguito rigorosamente solo combinazioni delle **operazioni inverse** a quelle di tipo 1 e 2. Eseguendo al contrario le corrispondenti operazioni dirette, Emanuele può produrre le terne in questione, quindi queste configurazioni finali sono possibili. Bisogna solo fare attenzione all'ordine delle operazioni, ricordando la Legge Della Funzione Inversa: prima si mettono i calzini, poi si mettono le scarpe, quindi si tolgono le scarpe e solo alla fine si tolgono i calzini!

4 Soluzione del quarto esercizio

Quante rette dividono il triangolo in due parti di ugual area e perimetro?

Una soltanto.
La prima osservazione da fare è che il triangolo in questione è rettangolo: i suoi lati sono rispettivamente il doppio dei valori della terna pitagorica per eccellenza 3, 4 e 5. Per analizzare a fondo la situazione, dividiamo il problema in due casi.

La retta passa da un vertice

Analizzo il caso in cui la retta passa dal vertice C (Fig. 6). Le altre due possibilità si studiano in modo analogo.

Sia K l'intersezione tra la retta e l'ipotenusa del triangolo. Questo punto divide l'ipotenusa in due parti, lunghe x e $10 - x$. I due poligoni (in questo caso due triangoli) che dovrebbero avere ugual area e perimetro, hanno un lato in comune; possiamo quindi ignorarlo nell'imporre la condizione sul perimetro:

$$6 + x = 8 + 10 - x$$

Deve quindi essere $x = 6$. Vediamo però che questo valore di x rende diverse le due aree:

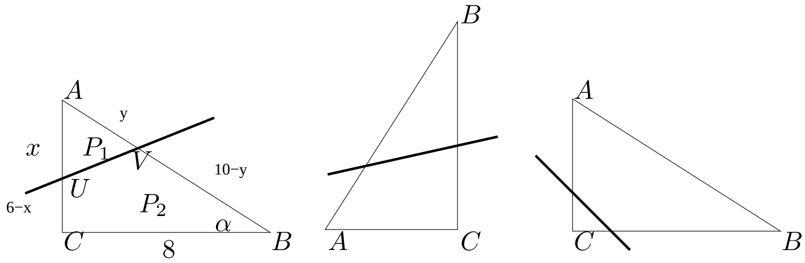

Figura 7: I casi in cui la retta interseca due lati del triangolo

$$
\begin{aligned}
Area(T_1) &= Area(T_2) \\
\frac{6x\cos\alpha}{2} &= \frac{8(10-x)\sin\alpha}{2} \\
\frac{x}{10-x} &= \frac{4}{3}\tan\alpha \\
\frac{6}{4} &= \frac{4}{3}\tan\alpha \\
\frac{9}{8} &= \tan\alpha
\end{aligned}
$$

Ma $\tan\alpha$ è il rapporto del cateto opposto ad α e di quello adiacente, quindi vale $\frac{6}{8}$ e non $\frac{9}{8}$: se la retta passa dal vertice C non divide il triangolo in poligoni equivalenti ed equiperimetrici. Per gli altri vertici si procede ancora più speditamente (secondo e terzo triangolo di Fig. 6): una volta ottenuto il valore di x che rende uguali i perimetri, si vede che questo non corrisponde al punto medio del cateto tagliato dalla retta. Così invece dovrebbe essere, perché i due triangoli hanno la stessa altezza (il cateto alla base del triangolo grande) e per avere la stessa area dovrebbero quindi avere anche la base uguale. Dunque nessuna retta che passa per un vertice ha la proprietà desiderata.

La retta taglia due lati

Adesso si tratta il caso in cui la retta taglia due lati (Fig. 7).

Dapprima consideriamo che i lati in questione siano AC e AB. Chiamo le intersezioni della retta con questi lati rispettivamente U e V. U divide AC in due parti lunghe x e $6-x$, mentre V divide AB in parti lunghe y e $10-y$. Nell'imporre la condizione sul perimetro possiamo ignorare il lato interno, perché comune ai due poligoni P_1 e P_2; deve quindi valere:

$$x + y = 6 - x + 10 - y + 8$$

ossia $x + y = 12$. Per quanto riguarda le aree, invece, dobbiamo imporre:

$$
\begin{aligned}
Area(P_1) &= Area(P_2) \\
Area(P_1) &= Area(Triangolo) - Area(P_1) \\
2 \cdot Area(P_1) &= Area(Triangolo) \\
2 \cdot Area(P_1) &= \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \\
2 \cdot \left(\frac{x(y\cos\alpha)}{2}\right) &= 24
\end{aligned}
$$

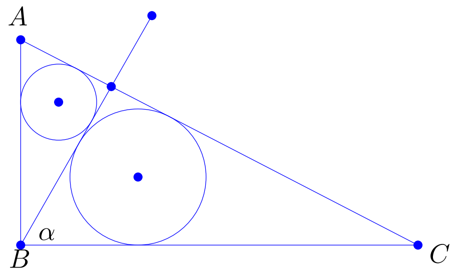

Figura 8: I casi in cui la retta passa da un vertice del triangolo

Visto che $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, sappiamo che $x \cdot y = 30$. Conoscendo somma e prodotto delle nostre incognite, sappiamo che esse sono le due soluzioni dell'equazione di secondo grado $t^2 - 12t + 30 = 0$, ossia $6 + \sqrt{6}$ e $6 - \sqrt{6}$; il fatto che il primo valore possa essere attribuito solamente ad y, in quanto x è minore di 6, ci garantisce che in queste condizioni esiste una ed una sola coppia (x, y) che risolve il problema, cioè tra le rette che tagliano AC e AB una sola ha la proprietà richiesta.

Restano i casi in cui la retta interseca BC e BA oppure interseca BC e CA. Si procede allo stesso modo, arrivando però ad un'equazione di secondo grado priva di soluzioni (se la retta interseca BC e BA) oppure ad un'equazione con una soluzione "troppo grande", se la retta interseca i cateti: in tal caso le condizioni imposte vorrebbero che $x = 6 + 2\sqrt{3}$ e $y = 6 - 2\sqrt{3}$ o viceversa, ma $6 + 2\sqrt{3}$ è maggiore di 8 e né x né y possono assumere quel valore. Dunque la retta che abbiamo trovato prima è l'unica che c'è.

Quante rette dividono il triangolo in due poligoni circorscritti a cerchi di ugual raggio?

Come per rispondere alla domanda precedente, è opportuno distinguere due casi: la retta passa per un vertice oppure taglia due lati. Scopriremo che le rette con questa proprietà sono tre.

La retta passa per un vertice

Si consideri la Fig. 8: qualunque sia l'inclinazione della retta, essa divide il triangolo in due triangoli, che ovviamente hanno sempre un cerchio inscritto.

Parametrizzando l'inclinazione della retta con l'angolo α, notiamo che ad ogni valore di quest'angolo compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ corrispondono due cerchi inscritti. Per alcuni valori il cerchio "di sopra" è più piccolo dell'altro, per altri valori dell'angolo le proporzioni si invertono: questo ci assicura che esiste un valore di α per cui i raggi sono uguali.

Questo ragionamento può essere fatto per ogni vertice, ed in questo modo troviamo ben tre rette con la proprietà desiderata.

La retta taglia due lati

In questo caso nessuna retta divide il triangolo in due poligoni circoscritti a cerchi uguali (Fig. 9). Chiamo r la retta, e supponiamo intersechi i lati AC e CB. Supponiamo anche di essere stati così fortunati da aver messo la retta r in modo che il quadrilatero abbia un cerchio inscritto (non tutti i quadrilateri ce l'hanno).

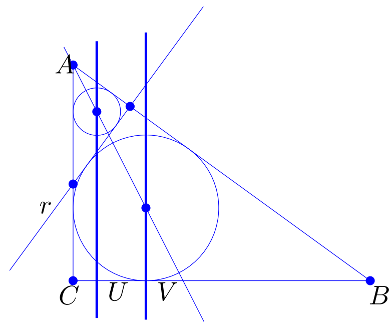

Figura 9: I casi in cui la retta interseca due lati

Siccome entrambe le circonferenze sono tangenti al cateto AC, le distanze del vertice C dalle proiezioni dei loro centri sul cateto CB corrispondono alle lunghezze dei raggi delle circonferenze. Chiamo U e V le proiezioni dei centri delle circonferenze su CB. Se i raggi fossero uguali, i punti U e V coinciderebbero.

Ma questo non è possibile!

Infatti, per il teorema delle tangenti, la bisettrice dell'angolo $C\widehat{A}B$ passa per i centri delle due circonferenze, e se questi fossero allineati verticalmente, la bisettrice di cui sopra sarebbe perpendicolare a CB, e conseguentemente l'angolo $C\widehat{A}B$ avrebbe ampiezza nulla, il che è assurdo.

Questo ragionamento si applica, con poche variazioni, anche agli altri casi in cui la retta taglia due lati; una simile retta non può quindi possedere la propietà richiesta dal problema.

Il fatto che i cerchi in Fig. 9 non possono avere lo stesso raggio può anche essere dimostrato in un altro modo: basta osservare che il cerchio inscritto nel quadrilatero coincide col cerchio incritto nel triangolo "grande": infatti è tangente ad ognuno dei lati del triangolo, e siccome la circonferenza iscritta in un triangolo è unica, le due circonferenze coincidono. Ne segue che il cerchio iscritto nella porzione rimanente del triangolo ha un raggio necessariamente inferiore, e non può essere uguale altrimenti i cerchi inscritti nel triangolo "piccolo" e nel quadrilatero coinciderebbero, il che non può avvenire.