1) Francesco ha trovato un metodo curioso per memorizzare il numero di tre cifre che costituisce la combinazione del suo lucchetto. Il prodotto delle tre cifre divide la somma delle tre cifre. Inoltre ricorda che è il più grande numero con questa proprietà. Qual è la combinazione?

Soluzione

La combinazione è 321. Indichiamo con x, y e z le tre cifre della combinazione. La proprietà che devono verificare può essere tradotta nella seguente. Esiste un numero intero positivo k tale che

$$x + y + z = k \cdot xyz \,.$$

Per prima cosa osserviamo che la proprietà è indipendente dall'ordine in cui si prendono le cifre x, y e z. Pertanto, cercando il numero più grande che verifica la proprietà, possiamo supporre che $x \geq y \geq z$. Un'altra osservazione è che, dovendo essere $x + y + z \geq xyz$, non potremo prendere cifre con valori molto grandi. Cerchiamo di rendere rigorosa questa affermazione. Deve essere

$$x + y \geq (xy - 1)z\,,$$

e, siccome z è un numero maggiore o uguale a 1, possiamo dedurre che $xy - x - y \leq 1$, cioè che

$$(x-1)(y-1) \leq 2\,.$$

A questo punto restano poche possibilità che possiamo analizzare separatamente. O y, che è minore o uguale a x, è uguale a 1, oppure $x - 1 = 2$ e $y - 1 = 1$.
Nel primo caso il numero è del tipo $x11$ e la proprietà richiede che x divida $x + 2$. Le uniche possibilità sono $x = 1$ e $x = 2$ (cioè i numeri 111 e 211).
Nel secondo caso il numero è del tipo $32z$, con $z \leq 2$, e la proprietà richiede che $z + 5$ divida $6z$. L'unica possibilità è $z = 1$ che fornisce il numero 321.

2) Due cerchi, senza parti in comune, sono contenuti in un triangolo equilatero di lato 10. Quanto vale al massimo la somma dei loro perimetri?

Soluzione

Al massimo la somma dei perimetri è pari a $20/\sqrt{3}$, valore che si ottiene quando uno dei due cerchi è quello inscritto al triangolo e l'altro è tangente al cerchio inscritto ed a due lati del triangolo.

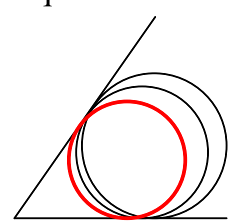

Figura 1

Affinché due cerchi abbiano la somma dei loro perimetri massima dovranno sicuramente non essere ingrandibili senza uscire dal triangolo o sovrapporsi tra loro. Questo vuol dire che ogni cerchio dovrà toccare un lato del triangolo o l'altro cerchio. Anzi, ogni cerchio deve toccare almeno tre di questi punti, altrimenti può essere ingrandito come suggerito in figura 1. Quindi un cerchio può toccare tutti i lati del triangolo equilatero (cioè essere il cerchio inscritto) oppure toccare due lati del triangolo e l'altro cerchio. Non potendo essere entrambi il cerchio inscritto, devono necessariamente toccarsi ed ognuno deve toccare almeno due lati del triangolo.

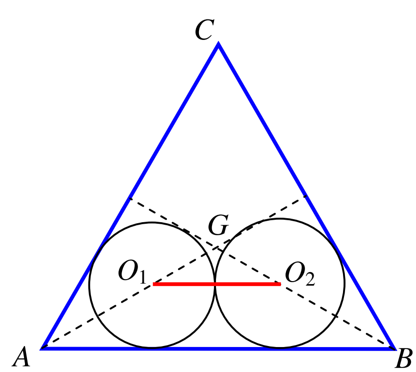

Figura 2

Indichiamo con A, B e C i vertici del triangolo equilatero, con G il baricentro del triangolo e con O_1 e O_2 i centri dei due cerchi. Possiamo dunque supporre, come in figura 2, che O_1 e O_2 si trovino rispettivamente sui segmenti AG e BG.
Indicati con r_1 e r_2 i raggi dei due cerchi, vogliamo capire come piazzare O_1 e O_2 per rendere massima la somma dei perimetri,

cioè per rendere massima la somma dei raggi. Osserviamo adesso che $O_1O_2 = r_1 + r_2$ e che $AO_1 = 2\ r_1$ e $BO_2 = 2\ r_2$. Quindi, rendere massima la somma dei perimetri equivale a rendere massima la lunghezza della spezzata AO_1O_2B. Tale lunghezza è chiaramente minore o uguale alla lunghezza della spezzata AGB ed inoltre vale l'uguaglianza se e solo se $O_1 = G$, oppure $O_2 = G$, cioè se e solo se uno dei due cerchi è inscritto al triangolo equilatero e l'altro è tangente al cerchio inscritto ed a due lati del triangolo.

3) Una scacchiera 8×8 ha le caselle colorate nel modo usuale rappresentato in figura 3. Supponiamo che sia possibile scambiare due righe o due colonne a nostro piacere. Ad esempio, la figura 4 rappresenta la scacchiera dopo lo scambio tra la seconda e la settima colonna.
Dopo 100 scambi di righe o colonne, le caselle vengono numerate da 1 a 64, partendo dall'alto a sinistra, riga per riga, come in figura 4.

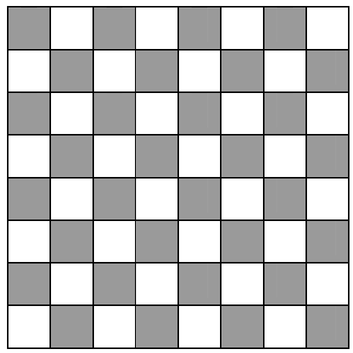

Figura 3

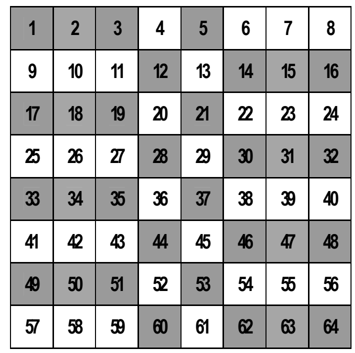

Figura 4

Dimostrare che, comunque siano stati effettuati gli scambi, la somma dei numeri sulle caselle bianche è 1040.

Soluzione

Non solo dopo 100 scambi di righe o colonne (comunque effettuati) la somma dei numeri sulle caselle bianche è 1040, ma anche dopo un qualsiasi numero di scambi.
L'osservazione principale è che, dopo un qualsiasi numero di scambi, ogni riga e ogni colonna contiene quattro caselle bianche e quattro caselle nere.
Analizziamo dunque come varia (o meglio, come non varia) la somma dei numeri sulle caselle bianche dopo lo scambio tra la j-esima e la k-esima colonna. I numeri sulle caselle della prima riga sono j e k. I numeri sulle caselle della seconda riga sono $j + 8$ e $k + 8$. Quelli sulle caselle della terza riga sono $j + 16$ e $k + 16$. E così di seguito fino all'ottava riga dove troviamo i numeri $j + 56$ e $k + 56$.
Se in una riga entrambe le caselle della j-esima e k-esima colonna sono bianche (o nere), allora non cambia niente in quella riga; se invece una casella è nera e l'altra è bianca, allora avremo una variazione di $j - k$ (o di $k - j$) a seconda dell'ordine. Siccome il numero di caselle bianche nelle singole colonne deve restare lo stesso, ci saranno tante coppie di caselle bianca-nera quante coppie di caselle nera-bianca. Quindi la somma dei numeri sulle caselle bianche non varia con un qualsiasi scambio di colonne.
Del tutto analogo è il discorso riguardo agli scambi tra righe. Per ogni casella nera della j-esima riga che diventa bianca dopo lo scambio abbiamo una casella nera della k-esima riga che diventa bianca; poiché la differenza tra i numeri sulle caselle di una colonna e della j-esima e della k-esima riga è pari a $8(j - k)$, la somma dei numeri sulle caselle bianche resta invariata.
Per verificare che 1040 è realmente il valore richiesto, basta osservare che la somma dei numeri sulle caselle bianche deve essere uguale alla somma dei numeri sulle caselle nere e quindi è la metà della somma di tutti i numeri da 1 a 64, cioè $65 \cdot 64/4 = 65 \cdot 16 = 1040$.

4) Alberto e Marco partono da un punto A e percorrono un metro in direzione nord. Girano di 90° a destra o a sinistra e vanno avanti ancora per un metro. Proseguono poi a svoltare a destra o a sinistra di 90° e ad andare avanti un metro e quindi ancora una svolta e un metro. Dopo aver percorso 200 metri si ritrovano in un punto B. Sapendo che hanno effettuato 94 svolte a destra e 105 svolte a sinistra, quale può essere la distanza massima tra A e B ? Quale la distanza minima?

Soluzione

La distanza massima è $94\sqrt{2}$ metri, cioè poco meno di 133 metri, mentre la distanza minima è 0.
Cominciamo con la distanza massima. Intuitivamente il modo più veloce per allontanarsi dal punto iniziale è procedere a zig-zag alternando le svolte a sinistra e quelle a destra, per quanto possibile.
Per cercare di rendere rigoroso il ragionamento, indichiamo con X_1, X_2, …, X_{94}, le posizioni in cui si trovavano i due amici quando decidono di girare a destra. Il percorso da A a X_1 è composto di sole svolte a sinistra, così come quello da X_{94} a B e quello tra due punti consecutivi X_k, X_{k+1}. Quindi ognuno di questi percorsi si svolge sul bordo di un quadrato di lato un metro. Ne segue che, ad esempio, la distanza $d(X_k, X_{k+1})$ tra X_k e X_{k+1} è minore o uguale alla lunghezza della diagonale del quadrato, cioè a $\sqrt{2}$. Siccome il percorso più breve tra A e B non passa necessariamente da tutti i punti X_k, possiamo concludere

$$d(A,B) \le d(A,X_1) + d(X_1,X_2) + d(X_2,X_3) + \ldots + d(X_{93},X_{94}) + d(X_{94},B) \le 95\sqrt{2}\,.$$

D'altra parte affinché valga l'uguaglianza in questa formula Alberto e Marco devono avere effettuato, in ogni frazione di percorso considerata, una svolta a sinistra ed eventualmente qualche giro; in totale sono $95+4g$ svolte a sinistra, dove g indica il numero di giri compiuti. Invece sappiamo che il numero di svolte a sinistra è stato 105. Quindi ci sono due svolte a sinistra in più di un percorso ottimale. Se queste due svolte si compiono nell'andare da X_{94} a B, allora risulta $X_{94} = B$ e $d(A,B) = 94\sqrt{2}$; se si compiono nel tratto da X_k a X_{k+1}, allora basta osservare che la successione di svolte (destra, sinistra, sinistra, sinistra, destra) equivale ad una unica svolta a sinistra (vedi figura 5) e quindi, ripetendo il ragionamento precedente, si conclude $d(A,B) \le 93\sqrt{2}$. Se queste due svolte si compiono invece in tratti diversi, allora accade che le direzioni di marcia prima e dopo tali tratti siano opposte. Volendo rendere massima la distanza tra A e B è pertanto chiaro che conviene inserire tali svolte nel primo e nell'ultimo tratto; anche in questo caso risulta $d(A,B) = 94\sqrt{2}$.
Concludendo, indicate con D e S le successive scelte di direzione (rispettivamente per destra e sinistra), ogni serie del tipo

SS…SDSDSD…SDSDSS…SS

(con 94 D e 105 S) rappresenta un percorso in cui il punto iniziale e quello finale distano proprio $94\sqrt{2}$ metri.

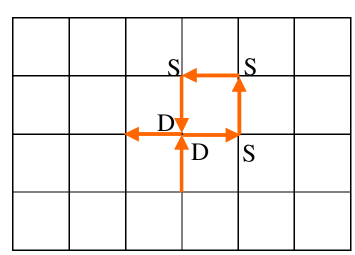

Figura 5

La distanza minima è 0. La chiave del problema è l'osservazione illustrata in figura 5 che si traduce, nel linguaggio appena introdotto, nella scrittura

DSSSD = S.

Quindi il percorso risultante dalle successive svolte DSSSDSS ci riporta esattamente al punto di partenza. Ad esso possono essere aggiunti 23 giri in senso orario sul bordo di un quadrato di lato un metro (per un totale di 92 svolte a destra) e 25 giri in senso antiorario su un analogo quadrato (per un totale di 100 svolte a sinistra).