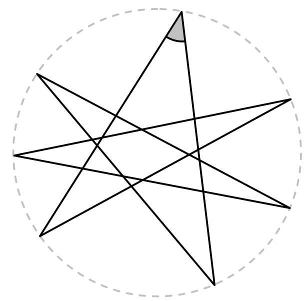
GARA MATEMATICA
Dipartimento di Matematica "Ulisse Dini"
Viale Morgagni 67/A - 50134 Firenze

17 Marzo 2008

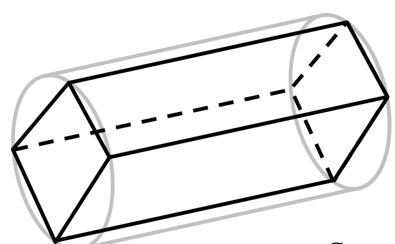
1) Su una circonferenza prendiamo sette punti distinti. Disegniamo una stella a sette punte tracciando, come nella figura a lato, tutti i segmenti che congiungono due dei sette punti e che separano i restanti cinque in due gruppi, da due e da tre elementi. Quanto può valere la somma degli angoli (di cui uno evidenziato in figura) determinati dalle sette punte?

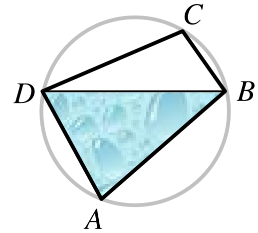


2) Il parlamento di Trilandia è composto da 123 seggi occupati da parlamentari di tre partiti. Quante possibili distribuzioni di seggi non garantiscono la maggioranza assoluta a nessun partito?

3) Determinare il più piccolo numero intero positivo con la seguente proprietà: quando la prima cifra viene trasferita all'ultimo posto (esempio 46729 → 67294) si ottiene il triplo del numero di partenza.
Quali numeri hanno la proprietà precedente?

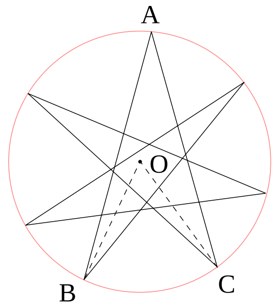
4) Un serbatoio ha la forma di un prisma retto a base quadrangolare con superficie totale di 9,36 metri quadri. Esso è sorretto da una imbracatura cilindrica con raggio di mezzo metro ed altezza di 3 metri. L'acqua al suo interno è in quantità tale da occupare (quando il cilindro è opportunamente adagiato su di un piano orizzontale) indifferentemente le sezioni individuate da uno dei triangoli *ABD*, *ABC*, *BCD* e *CDA* (in figura è schematizzato il primo caso).
Che forma ha la base del prisma?
Quanti litri d'acqua contiene attualmente il serbatoio?





Soluzioni degli esercizi proposti

Esercizio 1:



La somma degli angoli è π radianti.
Fissiamo uno qualunque dei vertici della stella e indichiamolo con A. Siano B e C i punti di intersezione delle corde che formano il vertice A con la circonferenza, come in figura. Indichiamo con O il centro del cerchio e conduciamo i raggi da O a B e a C. L'angolo $\widehat{BOC}$ è quindi l'angolo al centro relativo all'angolo alla circonferenza $\widehat{BAC}$, e per questo $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$.

Ad ogni angolo determinato dalle punte della stella corrisponde quindi un angolo al centro e l'angolo alla punta è la metà di quello al centro. Quindi la somma degli angoli delle punte è la metà della somma degli angoli al centro determinati dai vertici della stella. Osservando che gli angoli al centro ricoprono tutto l'angolo giro (poiché gli archi determinati dai vertici della stella coprono tutta la circonferenza), si ha che la somma degli angoli delle punte è metà di un angolo giro, cioè π radianti.

Esercizio 2:

La maggioranza assoluta si ottiene avendo la metà dei seggi più uno, cioè 62 seggi. Si osserva subito che se uno dei tre partiti non ottiene neppure un seggio, necessariamente uno degli altri due ha la maggioranza assoluta. Poiché siamo interessati a contare quante sono le configurazioni in cui **nessuno** dei tre partiti ottiene la maggioranza assoluta, sono possibili solo le seguenti configurazioni (indichiamo i tre partiti di Trilandia con le lettere A, B e C):

A	B	C
1 seggio	61 seggi	61 seggi
2 seggi	60 seggi	61 seggi
	61 seggi	60 seggi
3 seggi	59 seggi	61 seggi
	60 seggi	60 seggi
	61 seggi	59 seggi
...	...	...
61 seggi	1 seggio	61 seggi
	2 seggi	60 seggi
	3 seggi	59 seggi
	...	...
	61 seggi	1 seggio

La legge che regola questo schema è dunque la seguente: **quando si assegnano n seggi ad A ci sono n possibili configurazioni**. Per contare tutti i possibili casi basta allora fare la somma dei primi 61 numeri (naturali)

$$1 + 2 + 3 + ... + 60 + 61 = \frac{61 \cdot 62}{2} = 1891,$$

secondo la regola generale: $1 + 2 + 3 + ... + n - 1 + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Esercizio 3:

Indichiamo il numero cercato con

$$x = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + ... + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0.$$

Applicando la trasformazione richiesta si ottiene il nuovo numero

$$y = 10^n a_{n-1} + 10^{n-1} a_{n-2} + 10^{n-2} a_{n-3} + ... + 10^2 a_1 + 10 a_0 + a_n.$$

La condizione imposta dall'esercizio è $y = 3x$, cioè

$$10^n a_{n-1} + 10^{n-1} a_{n-2} + 10^{n-2} a_{n-3} + ... + 10^2 a_1 + 10 a_0 + a_n =$$
$$= 3 \cdot 10^n a_n + 3 \cdot 10^{n-1} a_{n-1} + 3 \cdot 10^{n-2} a_{n-2} + ... + 3 \cdot 10^2 a_2 + 3 \cdot 10 a_1 + 3 \cdot a_0.$$

Portando a primo membro e mettendo in evidenza in ogni addendo la massima potenza di 10 si ottiene:

$$7 \cdot 10^{n-1} a_{n-1} + 7 \cdot 10^{n-2} a_{n-2} + 7 \cdot 10^{n-3} a_{n-3} + \dots$$
$$\dots + 7 \cdot 10^2 a_2 + 7 \cdot 10 a_1 + 7 \cdot a_0 - (1 - 3 \cdot 10^n) a_n = 0.$$

Aggiungendo e togliendo $7 \cdot 10^n a_n$ si trova: $7x = (10^{n+1} - 1) a_n$, ovvero

$$x = \frac{10^{n+1} - 1}{7} a_n.$$

Essendo x un numero naturale, questo è possibile se e solo se 7 **divide** $10^{n+1} - 1$. Si osserva che $10^{n+1} - 1$ è un numero della forma 999...9, con $n+1$ cifre. Esso è divisibile per 7 se e solo se $n+1$ è un multiplo di 6. Poichè $n+1$ sono le cifre del numero x di partenza, abbiamo dedotto che tutti i numeri con la proprietà richiesta devono avere un numero di cifre multiplo di 6. Cerchiamo ora il numero più piccolo con questa proprietà:
Sicuramente avrà 6 cifre (il più piccolo multiplo di 6 è 6 stesso) e quindi sarà della forma: $x = a_5 10^5 + a_4 10^4 + ... + a_0$. Inoltre, dovendo essere $y = 3x$ si avrà $a_5 \leq 3$. Riprendendo la formula precedente $x = \frac{10^{n+1}-1}{7} a_n$ con $n+1 = 6$ e $a_5 = 1$ ed effettuando la divisione si ha:

$$x = \frac{999999}{7} = 142857 \text{ (da cui } y = 428571).$$

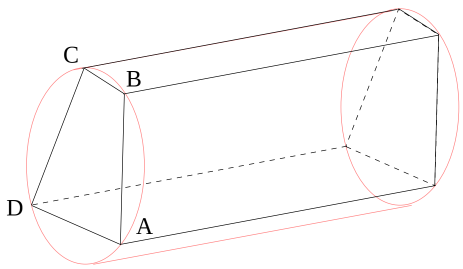
Il numero x è dunque il numero più piccolo con la proprietà richiesta.
Questo risponde alla prima domanda.

Vediamo ora quali sono tutti i possibili numeri con la proprietà richiesta. Sia $a_5 = 2$. Sempre dalla formula $x = \frac{10^{n+1}-1}{7} a_n$ con $n+1 = 6$ e $a_5 = 2$ si trova $x = 285714$ (da cui $y = 857142$). Procedendo nello stesso modo anche con l'ultimo possibile valore $a_5 = 3$ si ottiente $x = 428571$ per il quale però $a_5 = 4$ e non 3 come richiesto per cui tale valore di x non è una soluzione del problema.
Si deduce quindi che i numeri di 6 cifre sono solo due: $x_1 = 142857$ e $x_2 = 285714$.

Passiamo a quelli di 12 cifre. Abbiamo: $x = \frac{10^{n+1}-1}{7} a_n$, con $n+1 = 12$ e $a_{11} = 1$, cioè $x = \frac{999999999999}{7} = 142857142857$. Se invece $a_{11} = 2$ si trova $x = 285714285714$. Iterando il procedimento, siamo in grado di rispondere alla seconda domanda: tutti i possibili numeri con la proprietà richiesta sono numeri di $6h$ cifre, con $h = 1, 2, 3, ...$, della forma:

h=1 (6 cifre)	142857	285714
h=2 (12 cifre)	142857142857	285714285714
h=3 (18 cifre)	142857142857142857	285714285714285714
...	...	...
h=n (12n cifre)	142857142857 ......142857 (n gruppi delle cifre 142857)	285714285714 ......285714 (n gruppi delle cifre 285714)

Esercizio 4:



Sappiamo che l'acqua si può disporre in modo da occupare le sezioni individuate da uno dei triangoli ABD, ABC, BCD e CDA, come schematizzato in figura. Se indichiamo con h l'altezza del prisma, abbiamo che

$$\text{volume acqua} = (\text{Area } ABC)h = (\text{Area } BCD)h = (\text{Area } CDA)h = (\text{Area } DAB)h.$$

Siccome h rimane costante si ha che l'area dei quattro triangoli risulta la stessa. Ora tracciamo le diagonali del quadrilatero $ABCD$ come in figura. Siccome Area ABC = Area ADC e i due triangoli hanno la stessa base, segue che anche le altezze DK e BH sono uguali; ma allora i triangoli DOK e BOH sono congruenti per il secondo criterio e in particolare $DO = OB$. Il ragionamento si ripete per i triangoli BAD e BCD ottenendo quindi che $AO = OC$. Il quadrilatero $ABCD$, dunque, ha le diagonali che si dividono scambievolmente a metà: da questo si deduce che il quadrilatero è un parallelogramma. Ricordando infine che esso deve essere inscrivibile in una circonferenza, concludiamo che deve essere un **rettangolo**.

La diagonale del rettangolo inscritto nella circonferenza coincide con il diametro della stessa e quindi: $x^2 + y^2 = 1\,\mathrm{m}^2$. Ricordiamo poi che: $\mathrm{Sup}_{tot} = 2h(x+y) + 2xy = 9,36\,\mathrm{m}^2$. Dunque siamo interessati a risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1\,\mathrm{m}^2 \\ 2h(x+y) + 2xy = 9,36\ \mathrm{m}^2 \end{cases}$$

Cercare di ricavare x,y procedendo per sostituzione può risultare piuttosto complicato. Un trucco è allora riscrivere la prima equazione come $(x^2 + y^2 + 2xy) - 2xy = 1\,\mathrm{m}^2$, cioè $(x+y)^2 - 2xy = 1\,\mathrm{m}^2$ e dunque il sistema diventa:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 1\,\mathrm{m}^2 \\ 2h(x+y) + 2xy = 9,36\,\mathrm{m}^2 \end{cases}$$

Sommando membro a membro si trova: $(x+y)^2 + 2h(x+y) = 10,36\,\mathrm{m}^2$, e ponendo $x+y = t$, ci riduciamo alla facile equazione di secondo grado: $t^2 + 2ht - 10,36\,\mathrm{m}^2 = 0$. Risolvendo (naturalmente interessano solo i valori positivi di t) si trova $t = -h + \sqrt{h^2 + 10,36\,\mathrm{m}^2} = 1,4\,m$, da cui $x+y = 1,4\,m$. Ora si osserva che non interessano tanto i valori x,y, quanto il prodotto xy poichè Volume acqua $= \frac{1}{2}hxy$ Possiamo facilmente ricavare xy dalla seconda equazione del sistema trovando $xy = 0,48\,\mathrm{m}^2$.

Concludendo si può rispondere alla seconda domanda

$$\text{Volume acqua} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0,48\,\mathrm{m}^3 \ = \ 0,72\,\mathrm{m}^3 \ = \ \mathbf{720}\,\text{litri.}$$

Soluzioni a cura di Chiara Bianchini, Carlo Cintolesi, Gloria Papi, Stefano Amato.