Soluzione esercizi Gara Matematica 2009

(a cura di Stefano Amato, Emanuele Leoncini e Alessandro Martinelli)

Esercizio 1 *In una scacchiera di* 100×100 *quadretti, Carlo colora un quadretto di rosso, poi un quadretto di blu, poi un quadretto rosso, poi tre quadretti blu, poi dopo aver colorato un quadretto rosso riempie cinque quadretti di blu. E così via, colorando ogni volta due quadretti blu in più della volta precedente ed un quadretto rosso. Quando Carlo ha colorato l'intera scacchiera, quanti quadretti rossi ci saranno?*

Soluzione Esercizio 1

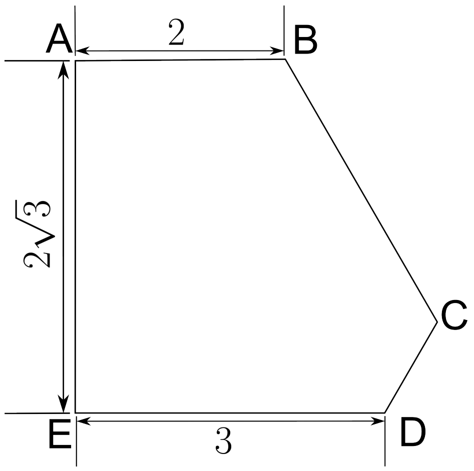
Per prima cosa, chiamiamo con colorazione k-esima l'istante in cui Carlo colora un quadretto di rosso e $2k-1$ quadretti di blu, con $k > 0$ intero. Chiaramente, per come è definito il problema, la colorazione m-esima segue sempre la sequenza k-esima se $m \geq k$. Dopo k colorazioni, Carlo può inserire k quadretti rossi e $\sum_{i=1}^{k}(2k-1)$ quadretti blu. Ricordando che $\sum_{i=1}^{k} k = \frac{k(k+1)}{2}$, ricaviamo che

$$\sum_{i=1}^{k} 2k-1 = 2(\sum_{i=1}^{k} k) - \sum_{i=1}^{k} 1 = k(k+1) - k = k^2, \tag{1}$$

ossia all' istante k Carlo potrà dipingere $k + k^2$ quadretti.

La colorazione k-esima sarà completata se il numero di quadretti colorabili all'istante k è al più uguale al numero di quadretti della scacchiera, ossia se $k + k^2 \leq 10^4$. Cerchiamo il più grande intero k per cui questo è possibile: si tratta di trovare il più grande intero k che risolve $k^2 + k - 10^4 \leq 0$. Tale disequazione ha soluzioni reali nell'intervallo $[\frac{-1-\sqrt{1+4\cdot 10^4}}{2}, \frac{-1+\sqrt{1+4\cdot 10^4}}{2}]$. Indicando con $\lfloor x \rfloor$ la parte intera di x, ossia il più grande intero minore o uguale ad x, il k che cerchiamo è $\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+4\cdot 10^4}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{4\cdot 10^4}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-1+200}{2} \right\rfloor = 99$. Cosa succede al passo $k+1 = 100$? Carlo colora un altro quadrato rosso e alcuni quadrati blu (il loro numero è strettamente minore di $2(k+1)-1$), terminando così la colorazione del quadrato. Dunque, Carlo ha utilizzato $k+1 = 100$ quadrati rossi.

Esercizio 2 *Consideriamo un pentagono* $ABCDE$, *con* $\hat{A} = \hat{E} = 90°$ *e tutti gli altri angoli uguali. Se* $\overline{AE} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AB} = 2$ *e* $\overline{DE} = 3$, *quanto valgono l'area e il perimetro del poligono?*



Soluzione Esercizio 2

Soluzione 1 In un poligono con n lati la somma interna degli angoli vale $180°(n-3)$: nel nostro caso $n = 5$ e la somma degli angoli vale $540°$. Si ha pertanto che $\hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \frac{540-180}{3} = 120°$

Congiungiamo adesso il vertice B al vertice E (vedi figura 3).

In tal modo si divide la figura di partenza in un trapezio e in un triangolo rettangolo. Indicato con $\alpha = A\hat{E}B$, si noti che $\tan(\alpha) = \frac{AB}{AE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, pertanto $\alpha = 30°$. Di conseguenza

$$A\hat{E}B = 30°, \quad A\hat{B}E = 60° \quad \overline{BE} = 4.$$

Prendiamo adesso in considerazione il trapezio $BEDC$ e si osservi che

$$C\hat{B}E = B\hat{E}D = 60°.$$

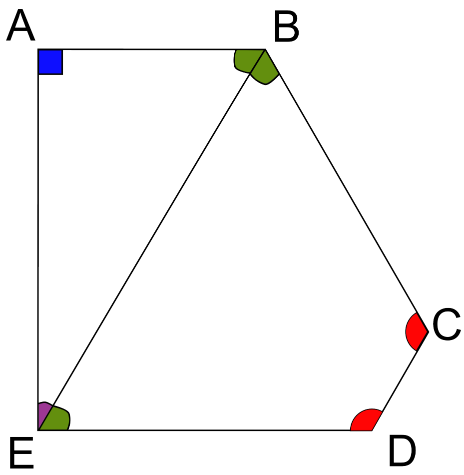


FIGURE 1: Costruzione

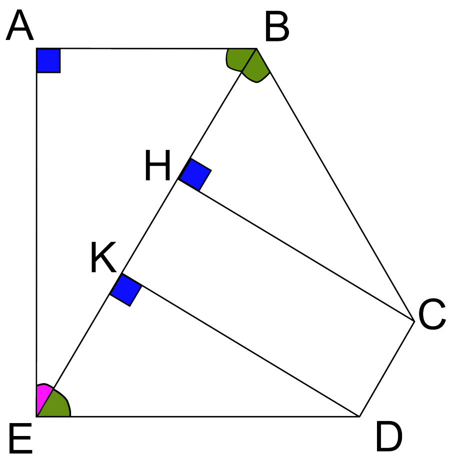


FIGURE 2: Costruzione

Si ha pertanto che il trapezio è isoscele e pertanto $\overline{BC} = \overline{ED} = 3$. Indicati poi con H e K i piedi delle altezze del trapezio condotte rispettivamente da C e D, si ha che $\overline{BH} = \overline{KE} = 3\cos 60° = \frac{3}{2}$ e pertanto $\overline{CD} = \overline{HK} = 1$.

L'altezza del trapezio risulta essere semplicemente $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

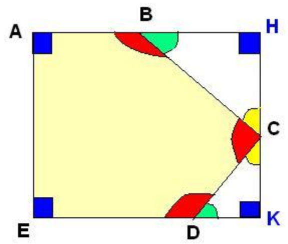
Pertanto si ha

$$2p_{ABCDE} = 2\sqrt{3} + 2 + 3 + 1 + 3 = 9 + 2\sqrt{3}$$

$$A_{ABCDE} = A_{ABE} + A_{BCDE} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 + \frac{1}{2}(4+1) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{23\sqrt{3}}{4}$$

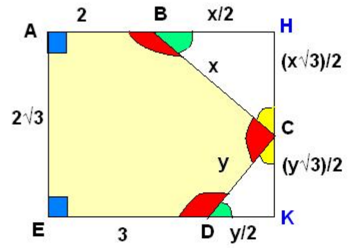
Soluzione 2

In un poligono con n lati la somma interna degli angoli vale $180°(n-3)$: nel nostro caso $n=5$ e la somma degli angoli vale $540°$. Per questo, abbiamo che $\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=\frac{540°-180°}{3}=120°$. A questo punto, prolunghiamo il lato AB dalla parte di B e il lato DE dalla parte di D e facciamo partire da C un segmento parallelo a AE che incontra i due prolungamenti rispettivamente in H e K. Abbiamo così inscritto il pentagono nel rettangolo $AHKE$ (vedi figura). A questo punto osserviamo che $C\hat{B}H=C\hat{D}K=60°$ e che $H\hat{C}B=K\hat{C}D=30°$: ponendo



$BC=x$ e $CD=y$, dato che i triangoli CHB e CKD sono triangoli rettangoli con angoli di $30°$, $60°$ e $90°$, risulta:

$$BH=\frac{x}{2},\ CH=\frac{x\sqrt{3}}{2},\ DK=\frac{y}{2},\ CK=\frac{y\sqrt{3}}{2}.$$



Dato che $AE=HK$ e $AH=EK$, otteniamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2+\frac{x}{2} = 3+\frac{y}{2} \\ \frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Con semplici operazioni, esso diviene:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=4, \end{cases}$$

ossia $BC=x=3$ e $CD=y=1$. Il perimetro del pentagono misura così:

$$2p_{ABCDE}=2\sqrt{3}+2+3+1+3=9+2\sqrt{3}.$$

Per calcolare l'area:

- misuriamo l'area del rettangolo $AHKE$, dove $AH=2+\frac{x}{2}=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$.

$$A_{AHKE}=2\sqrt{3}\cdot\frac{7}{2}=7\sqrt{3}.$$

- misuriamo l'area dei triangoli BHC e CKD:

$$A_{BHC}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{x^2\sqrt{3}}{8}=\frac{9\sqrt{3}}{8}$$

e, analogamente,

$$A_{CKD} == \frac{y^2\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

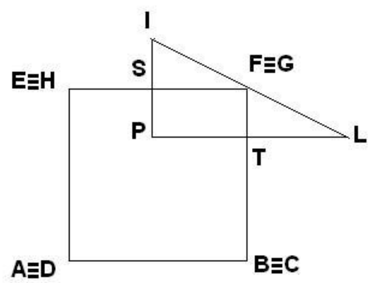
- calcoliamo infine l'area del pentagono:

$$A_{ABCDE} = A_{AHKE} - A_{BHC} - A_{CKD} = 7\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{23\sqrt{3}}{4}$$

Esercizio 3 *Sia C un cubo e P un punto interno. Per ogni faccia del cubo consideriamo la piramide che ha per base la faccia stessa e per vertice il punto simmetrico di P rispetto a quella faccia. Indicato con S il poliedro composto dall'unione del cubo e delle sei piramidi, quante facce ha S ? Come si deve scegliere il punto P affinchè il solido S abbia superficie minima?*

Soluzione Esercizio 3

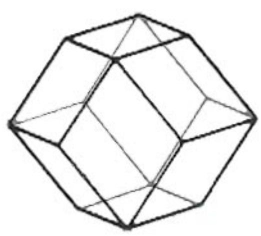
Le facce del solido ottenuto sono dodici, per dimostrarlo basta far vedere che l'angolo tra due facce che si appoggiano su uno stesso spigolo è di 180°. Per fare ciò consideriamola sezione del solido ottenuta con un piano passante per P e parallelo a una faccia del cubo. Voglio dimostrare che l'angolo $\widehat{IFL}$ è piatto.



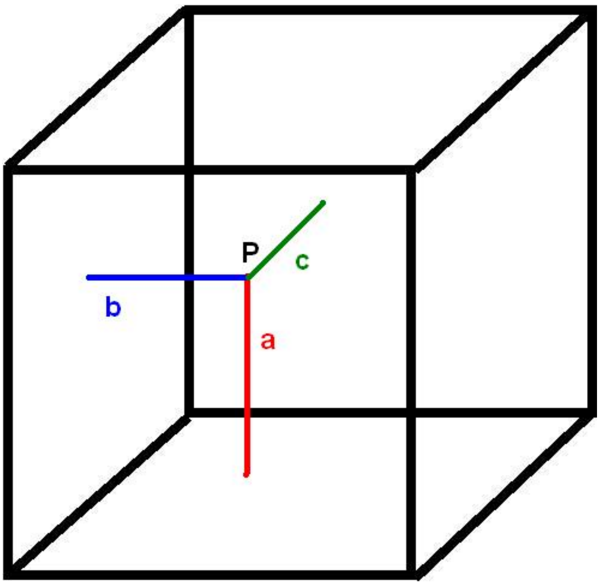
Per costruzione si ha che $\overline{IS} = \overline{PS} = \overline{FT}$ e $\overline{LT} = \overline{PT} = \overline{SF}$ quindi i triangoli rettangoli ISF e FTL sono uguali da cui $\widehat{TFL} = \widehat{SIF}$ osservando che $\widehat{SFI} + \widehat{SIF} = 90°$ si ottiene che:

$$\widehat{IFl} = 90° + \widehat{TFL} + \widehat{ISF} = 90° + \widehat{SFI} + \widehat{SIF} = 180°.$$

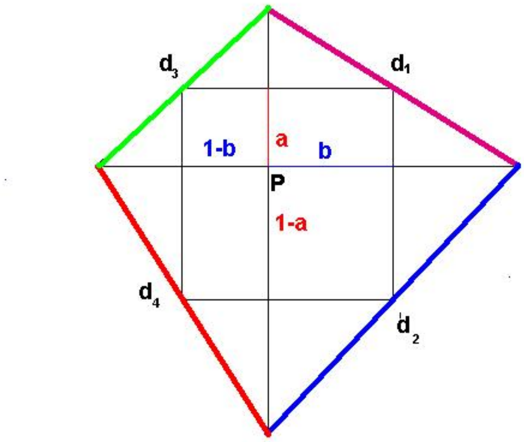
Il solido ottenuto si chiama dodecaedro rombico.



Per fare in modo che il solido abbia superficie minima bisogna scegliere come punto P il centro del cubo per dimostrarlo osserviamo per prima cosa che si può sempre supporre che il lato del cubo sia lungo 1. Inoltre le dodici facce del solido sono tutte rombi con una diagonale uguale al lato del rombo e l'altra che dipende da dove è situato il punto P.



Più precisamente se indichiamo con $a,\ b,\ c$ le distanze di P da tre facce del cubo tra loro a due a due perpendicolari si vede facilmente che la superficie laterale del solido è:



$$S = \frac{1}{2}\{d_1 + d_2 + \cdots + d_{12}\} = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}\{2\sqrt{a^2+b^2} + 2\sqrt{a^2+(1-b)^2} + 2\sqrt{(1-a)^2+b^2} + 2\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2} + \tag{3}$$

$$+2\sqrt{c^2+b^2} + 2\sqrt{c^2+(1-b)^2} + 2\sqrt{(1-c)^2+b^2} + 2\sqrt{(1-c)^2+(1-b)^2} + \tag{4}$$

$$2\sqrt{a^2+c^2} + 2\sqrt{a^2+(1-c)^2} + 2\sqrt{(1-a)^2+c^2} + 2\sqrt{(1-a)^2+(1-c)^2}\}. \tag{5}$$

Ora per ottenere il nostro risultato basta ricordarsi la disuguaglianza elementare:

$$(A+B)^2 \leq 2(A^2+B^2)$$

da cui prendendo le radici si ha che (se A e B sono positivi!):

$$\frac{A+B}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{A^2+B^2}.$$

Applicando quest'ultima all'espressione della superficie laterale del solido si ottiene dopo facili conti che:

$$S \geq 6\sqrt{2}$$

Ma $6\sqrt{2}$ è proprio la superficie laterale del solido ottenuto prendendo come punto P esattamente il centro del cubo.

Esercizio 4 *Determinare tutte le coppie di numeri interi positivi* (x, y) *e tutte le coppie di primi distinti* (p, q), *con* p *e* q *maggiori di 1, tali che:*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & p^6 \\ x^3 - y^3 & = & p^4 q^2 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 4

Dalla seconda equazione del sistema ricaviamo subito che $x > y$: in questo modo risulta che $x - y < x + y$. La prima equazione si fattorizza nella forma:

$$(x - y)(x + y) = p^6$$

Essendo p un primo, otteniamo che

$$x - y = p^n$$

$$x + y = p^{6-n},$$

dove n è un intero positivo e $n < 6 - n$, ossia $n \in \{0, 1, 2\}$. In questo modo, x e y si scrivono come:

$$x = \frac{p^{6-n} + p^n}{2}$$

$$y = \frac{p^{6-n} - p^n}{2}$$

A questo punto, il primo termine della seconda equazione del sistema diventa:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2 + xy) = (x - y)[(x + y)^2 - xy] =$$

$$= p^n[p^{12-2n} - \frac{p^{12-2n} - p^{2n}}{4}] =$$

$$= p^n[\frac{3p^{12-2n} + p^{2n}}{4}] =$$

$$= p^{3n}[\frac{3p^{12-4n} + 1}{4}],$$

cioè

$$p^{3n}[\frac{3p^{12-4n} + 1}{2^2}] = p^4 q^2$$

Distinguiamo due casi:

- $p = 2$. In tal caso, l'espressione diventa:

  $$2^{3n}[\frac{3p^{12-4n} + 1}{2^2}] = 2^{3n-2}[3 \cdot 2^{12-4n} + 1] = 2^4 q^2$$

  Si osserva subito che il fattore $3 \cdot 2^{12-4n} + 1$ risulta dispari e, dunque, l'unica possibilità che abbiamo è:

  $$3 \cdot 2^{12-4n} + 1 = q^2,$$
  $$2^{3n-2} = 2^4.$$

  Segue che $3n - 2 = 4$, ossia $n = 2$. Sostituendo abbiamo:

  $$3 \cdot 2^{12-4\cdot 2} + 1 = 49 = 7^2,$$

  ossia $q = 7$, $x = \frac{2^4+2^2}{2} = 10$ e $y = \frac{2^4-2^2}{2} = 6$.

- p **dispari**. In tal caso, si osserva che il fattore $\frac{3p^{12-2n}+1}{4}$ non è divisibile per p. L'unica possibilità è:

  $$\frac{3 \cdot p^{12-4n} + 1}{4} = q^2,$$
  $$p^{3n} = p^4.$$

  Otteniamo $3n = 4$, ossia $n = \frac{4}{3}$, che è impossibile.

L'unica soluzione risulta essere:

$$(x, y) = (10, 6)$$

$$(p, q) = (2, 7)$$

.