



**6 Aprile 2009**

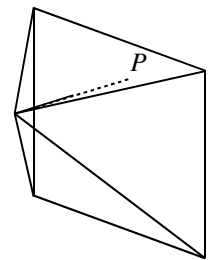
1) In una scacchiera di  $100 \times 100$  quadretti, Carlo colora un quadretto di rosso, poi un quadretto di blu, poi un quadretto rosso, poi tre quadretti blu, poi dopo aver colorato un quadretto rosso riempie cinque quadretti di blu. E così via, colorando ogni volta due quadretti blu in più della volta precedente ed un quadretto rosso. Quando Carlo ha colorato l'intera scacchiera, quanti quadretti rossi ci saranno?

2) Consideriamo un pentagono  $ABCDE$  con  $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$  e gli altri tre angoli uguali. Se  $AE = 2\sqrt{3}$ ,  $AB = 2$  e  $DE = 3$ , quanto valgono l'area e il perimetro del poligono?

3) Sia  $C$  un cubo e  $P$  un punto interno. Per ogni faccia del cubo consideriamo la piramide che ha per base la faccia stessa e per vertice il punto simmetrico di  $P$  rispetto a quella faccia (vedi figura).

Indicato con  $S$  il poliedro composto dall'unione del cubo e delle sei piramidi, quante facce ha  $S$ ?

Come si deve scegliere il punto  $P$  affinché il solido  $S$  abbia superficie minima?



4) Determinare tutte le coppie di numeri interi positivi  $(x, y)$  e tutte le coppie di primi distinti  $(p, q)$ , con  $p$  e  $q$  maggiori di 1, tali che:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = p^6 \\ x^3 - y^3 = p^4 q^2 \end{cases}$$