Gara Matematica

Dipartimento di Matematica "Ulisse Dini"

Viale Morgagni 67/a - 50134 Firenze

Soluzioni edizione 2011

Esercizio 1. Determinare tutti gli interi positivi non nulli $\mathbf{n}$ che sono uguali alla somma delle loro cifre più il quadrato della cifra delle unità.

Soluzione

Scriviamo $n = \sum_{i=0}^{m} a_i 10^i$, dove $a_0, \ldots, a_m$ sono le cifre di n. n deve soddisfare la seguente equazione:

$$a_0 + a_1 \cdot 10 + \ldots + a_m 10^m = a_0 + a_1 + \ldots + a_m + a_0^2,$$

ossia

$$9a_1 + 99a_2 + \ldots + \underbrace{99\ldots99}_{m \text{ volte}} a_m = a_0^2.$$

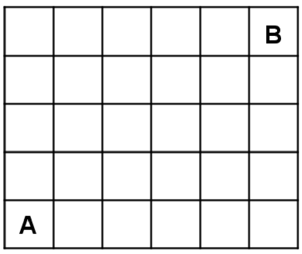
Dato che $a_0^2 \leq 81$, otteniamo che $a_i = 0$ per $i \geq 2$, ossia n è un numero a due cifre. Otteniamo così che

$$a_0^2 = 9a_1.$$

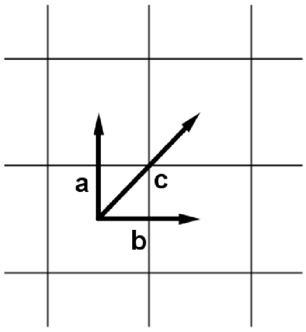
In particolare a_1 deve essere un quadrato minore di 10, quindi ho tre scelte:

- $a_1 = 1$: dunque $a_0 = 3$ e $\mathbf{n = 13}$;
- $a_1 = 4$: dunque $a_0 = 6$ e $\mathbf{n = 46}$;
- $a_1 = 9$: dunque $a_0 = 9$ e $\mathbf{n = 99}$.

Esercizio 2 Si consideri una tabella 5×6. Si parte dalla casella A e si vuole raggiungere la casella B, dove A e B sono due angoli opposti della tabella, come indicato dal disegno. Ad ogni passo è consentita una e una sola delle seguenti mosse:



- mi sposto di una casella verso l'alto (freccia **a**);
- mi sposto di una casella verso destra (freccia **b**);
- mi sposto di una casella in diagonale come riportato in figura (freccia **c**).



Quanti sono i cammini possibili?

Soluzione

Osserviamo per prima cosa che il numero di spostamenti diagonali è al massimo 4, dunque distinguiamo i cammini in base a tale numero.

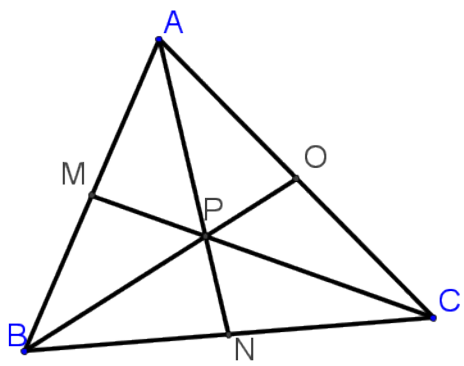
- **nessun spostamento diagonale**: in questo caso si compiono 9 mosse, di cui 5 spostamenti orizzontali e 4 verticali presi in ordine qualsiasi. In questo caso i cammini possibili sono $\binom{9}{5} = \mathbf{126}$;
- **un solo spostamento diagonale**: in questo caso si compiono 8 mosse, di cui uno spostamento diagonale, 4 orizzontali e 3 verticali presi in ordine qualsiasi. In questo caso i cammini possibili sono $\mathbf{8} \cdot \binom{7}{4} = \mathbf{280}$;
- **esattamente due spostamenti diagonali**: in questo caso si compiono 7 mosse, di cui due spostamenti diagonali, 3 orizzontali e 2 verticali presi in ordine qualsiasi. In questo caso i cammini possibili sono $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} = \mathbf{210}$;
- **esattamente tre spostamenti diagonali**: in questo caso si compiono 6 mosse, di cui tre spostamenti diagonali, 2 orizzontali e 1 verticale presi in ordine qualsiasi. In questo caso i cammini possibili sono $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = \mathbf{60}$;
- **esattamente quattro spostamenti diagonali**: in questo caso si compiono 5 mosse, di cui quattro spostamenti diagonali e uno orizzontale In questo caso i cammini possibili sono $\binom{5}{4} = \mathbf{5}$;

In totale i cammini possibili sono $\mathbf{126 + 280 + 210 + 60 + 5 = 681}$.

Esercizio 3 Dato un triangolo, dimostrare che la somma delle lunghezze delle tre mediane è compresa tra i $\frac{3}{4}$ del perimetro e il perimetro.

Soluzione

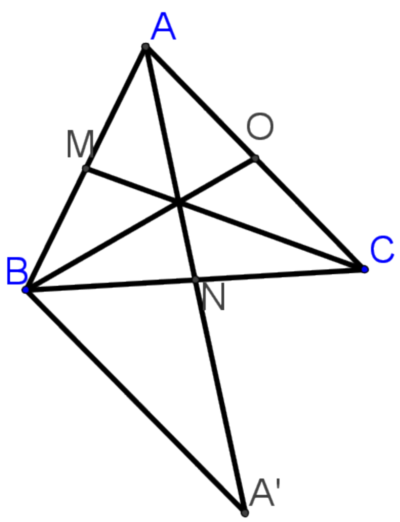
Consideriamo il triangolo ABC e chiamiamo con $\mathbf{m}$ la somma della lunghezze delle mediane e con $\mathbf{p}$ il perimetro del triangolo e proviamo se paratamente le due disuguaglianze. Prima di tutto indichiamo con M, N e O i punti medi rispettivamente di AB, BC e AC e con P il baricentro.



Prima disuguaglianza: $\mathbf{m} \leq \mathbf{p}$.

Si prolunga la mediana AN di un segmento $\overline{A'N} = \overline{AN}$ e si considerano i triangoli $A'BN$ e ACN. Essi sono congruenti per il primo criterio di congruenza: infatti

- $\overline{A'N} = \overline{AN}$ per costruzione;
- $\overline{BN} = \overline{CN}$ essendo N il punto medio di BC;
- $\widehat{A'NB} = \widehat{ANC}$ in quanto angoli opposti al vertice.



In particolare avremo che $\overline{A'B} = \overline{AC}$: per la disuguaglianza triangolare applicata al triangolo $AA'B$ si ha che

$$\overline{AA'} \leq \overline{AB} + \overline{A'B}.$$

Essendo $\overline{AA'} = 2\overline{AN}$ e $\overline{A'B} = \overline{AC}$ ne segue che

$$\overline{AN} \leq \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}.$$

Ripetendo lo stesso tipo di ragionamento per le altre mediane, otteniamo

$$\overline{BO} \leq \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{2}$$

e

$$\overline{CM} \leq \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{2}$$

per cui

$$\mathbf{m} = \overline{AN}+\overline{BO}+\overline{CM} \leq \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}+\frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{2}+\frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{2} = \overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC} = \mathbf{p}$$

Seconda disuguaglianza: $\mathbf{m} \geq \frac{3}{4}\mathbf{p}$ *ovvero* $\mathbf{p} \leq \frac{4}{3}\mathbf{m}$

Ricordiamo che il baricentro divide ciascuna mediana in due parti, che sono una il doppio dell'altra e perciò vale che:

$$\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AN}$$

$$\overline{BP} = \frac{2}{3}\overline{BO}$$

$$\overline{CP} = \frac{2}{3}\overline{CM}$$

Applichiamo la disuguaglianza triangolare a APB, BPC e CPA:

$$\overline{AB} \leq \overline{AP} + \overline{BP} = \frac{2}{3}\overline{AN} + \frac{2}{3}\overline{BO}$$

$$\overline{BC} \leq \overline{BP} + \overline{CP} = \frac{2}{3}\overline{BO} + \frac{2}{3}\overline{CM}$$

$$\overline{AC} \leq \overline{AP} + \overline{CP} = \frac{2}{3}\overline{AN} + \frac{2}{3}\overline{CM}.$$

In particolare otteniamo che

$$\mathbf{p} = \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC} \leq \frac{2}{3}\overline{AN}+\frac{2}{3}\overline{BO}+\frac{2}{3}\overline{BO}+\frac{2}{3}\overline{CM}+\frac{2}{3}\overline{AN}+\frac{2}{3}\overline{CM} = \frac{4}{3}\mathbf{m}.$$

Esercizio 4. Dimostrare che comunque vengano numerate le caselle di una tabella 5×5 da **1** a **25**, possiamo trovare due caselle adiacenti (cioè con un lato in comune) con numeri che differiscono tra loro per più di **4**.

Prima soluzione

Supponiamo di essere riusciti a sistemare i venticinque numeri in modo che caselle adiacenti riportino numeri con differenza minore o uguale a 4.
Osserviamo che se riordiniamo i numeri di ognuna delle cinque righe della tabella in ordine crescente da sinistra verso destra, allora non aumentiamo la differenza tra i numeri assegnati alle caselle adiacenti. Per dimostrare questo fatto, supponiamo che nella tabella riordinata la differenza massima sia ottenuta tra due caselle adiacenti A e B che riportano i numeri m ed n, con $m > n$, e facciamo vedere che anche nella tabella originaria dovevano esserci due caselle adiacenti con una differenza maggiore o uguale a $m - n$.
Se A e B appartengono alla stessa riga, allora è sufficiente osservare che anche nella tabella originaria dovevano esserci due caselle adiacenti contenenti una un numero minore o uguale ad n e l'altra un numero maggiore o uguale m. Quindi era presente una differenza maggiore o uguale a $m - n$ anche nella prima tabella.
Se invece A e B appartengono a due righe diverse, allora è sufficiente osservare che i numeri minori o uguali a n nella riga contenente n uniti ai numeri maggiori o uguali a m nella riga contenente m sono 6. Comunque fossero disposti sulle 5 colonne, ne troveremmo due sulla stessa colonna e quindi su caselle adiacenti. Pertanto anche in questo caso possiamo concludere che era presente una differenza maggiore o uguale a $m - n$ anche nella prima tabella.
Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per le colonne e dunque possiamo supporre che i numeri siano disposti in ordine crescente da sinistra a destra in ogni riga e dall'alto al basso in ogni colonna.
Ne segue che il numero 1 è assegnato alla casella in alto a sinistra ed il numero 25 a quella in basso a destra.
Chiaramente il numero 2 deve andare in una casella adiacente a quella

dell'1. A meno di scambiare righe con colonne, possiamo pensare che il numero 2 sia sistemato nella seconda casella della prima riga.
A questo punto osserviamo che i numeri disposti su due caselle, non adiacenti ma con un punto in comune P, differiscono per al più di 7. Infatti, se la loro differenza fosse 8 (di più non può essere per ipotesi), allora le altre due caselle contenenti P dovrebbero accogliere lo stesso numero.
Quindi la terza casella della seconda riga riporta un numero minore o uguale a 9. Analogamente, la quarta casella della terza riga contiene un numero minore o uguale a 16, mentre l'ultima casella della quarta riga non può contenere il numero 24, che deve dunque occupare la quarta casella della quinta riga.
Allora tra la quarta casella della terza riga (che abbiamo detto contiene un numero minore o uguale a 16) e la quarta casella della quinta riga (che abbiamo detto contiene il 24) la differenza è maggiore o uguale a 8. Ne deduciamo che le quarte caselle delle ultime tre righe contengono i numeri 16, 20 e 24. Inoltre la terza casella della seconda riga deve contenere il numero 9. La terza casella della terza riga contiene al più 13 (perché adiacente al 9) e almeno 13 (perché tale casella ha un punto in comune con quella contenente il 20). Quindi le terze caselle delle ultime tre righe contengono i numeri 13, 17, 21 (poiché il 16 ed il 20 erano già stati assegnati).
Dobbiamo ancora assegnare i numeri 22 e 23. Dovendo rispettare l'ordinamento, siamo costretti a sistemare il 23 nella quinta casella della quarta riga (accanto al 20) e poi il 22 nella quinta casella della terza riga, accanto al 16.
Abbiamo così trovato due caselle adiacenti con una differenza tra i numeri ad esse assegnati maggiori di 4. Come volevasi dimostrare.

Osserviamo infine che è possibile assegnare i 25 numeri alle caselle della tabella in modo che la differenza tra i numeri su caselle adiacenti sia al più 5.

Seconda soluzione

Immaginiamo di colorare di rosso le caselle che contengono i numeri minori o uguali a 10 e di bianco le altre.
Affermiamo che ci sono almeno 5 caselle bianche della tabella adiacenti

ad almeno una casella rossa.
Da questo risultato seguirebbe facilmente la tesi, in quanto dovremmo assegnare almeno un numero maggiore o uguale a 15 ad una casella bianca adiacente ad una rossa (che contiene dunque un numero minore o uguale a 10); pertanto la differenza sarebbe maggiore o uguale a 5.
Per ogni riga (o colonna) contenente almeno una casella rossa ed almeno una casella bianca, è chiaro che esiste una casella bianca adiacente ad una casella rossa. Pertanto non tutte le righe (né tutte le colonne) possono contenere caselle dei due colori.
Quindi possiamo assumere che ci sia una riga tutta rossa o tutta bianca ed analogamente una colonna dello stesso colore. Se ci fossero una riga ed una colonna totalmente rosse, allora ci sarebbero almeno 7 caselle adiacenti a queste e quindi potremmo trovare almeno 6 caselle bianche adiacenti a caselle rosse. Pertanto possiamo restringerci al caso in cui una riga ed una colonna sono totalmente bianche.
Se ci fossero quattro colonne contenenti almeno una casella rossa, allora avremmo come caselle bianche adiacenti a caselle rosse: almeno una nella colonna interamente bianca ed almeno una in ognuna delle quattro colonne non totalmente bianche. Per un totale di cinque. Analogamente possiamo concludere che non ci possono essere quattro righe contenenti almeno una casella rossa.
Ma allora le caselle rosse sarebbero confinate nell'intersezione di tre righe e tre colonne e quindi potrebbero essere al più 9. Assurdo. Ne segue che esistono sempre almeno 5 caselle bianche adiacenti a caselle rosse.