ORIGINALE
(Gentili)

Algebra Esterna.

Sia E uno spazio vettoriale di dimensione n, su $\mathbb{R}$; sia (per $q \geq 1$, $L_q(E;\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle forme q-lineari di $E^q \to \mathbb{R}$ (applicazioni lineari separatamente in ogni argomento); Se σ è una permutazione di $\{1,\dots,q\}$ e se $\varphi \in L_q(E,\mathbb{R})$ si definisce

$$\sigma\varphi(x_1,\dots,x_q) = \varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(q)}) \; ;$$

ovviamente anche $\sigma\varphi \in L_q(E,\mathbb{R})$, ed inoltre se anche τ è una permutazione di $\{1,\dots,q\}$

$$(\sigma\tau)\varphi = \sigma(\tau\varphi).$$

$$1\varphi = \varphi.$$

Una funzione $\varphi \in L_q(E,\mathbb{R})$ si dice <u>alternante</u> se vale

$$\sigma\varphi = (-1)^\sigma\varphi \qquad ((-1)^\sigma \text{ è la segnatura})$$

per ogni σ permutazione di $\{1,\dots,q\}$.

<u>Proposizione.</u> $\varphi \in L_q(E,\mathbb{R})$ è alternante se, e solo se,

$$\tau\varphi = -\varphi$$

per ogni trasposizione $\tau \in S_q = \{\text{permut. di } \{1,\dots,q\}\}$

dim.

se σ è alternante, allora vale la propietà annunciata essendo, se τ è una trasposizione:

$$(-1)^{\tau} = -1.$$

Supponiamo che valga la propietà annunciata poiché $\sigma \in S_q$ è realizzabile come

$$\sigma = \tau_1, \dots \tau_m$$

$\tau_1, \dots \tau_m$ trasposizioni, si ha che

$$\sigma\varphi = \tau_1 \cdots \tau_m \varphi = (-1)^m \varphi = (-1)^{\sigma} \varphi$$

essendo ovviamente $(-1)^m = (-1)^{\sigma}$.

Proposizione. $\varphi \in L_q(E, \mathbb{R})$ è alternante se, e solo se,

(1) $$\varphi(x_1, \dots, x_q) = 0$$

ogni volta che $x_i = x_j$ per almeno una coppia di indici i, j $i \neq j$.

dim.

Sia φ alternante, e sia $x_i = x_j$, $i \neq j$, e sia τ la trasposizione $i \rightleftarrows j$

$$\tau\varphi(x_1, \dots x_i, \dots, x_j, \dots x_q) = -\varphi(x_1, \dots x_i, \dots x_j, \dots x_q) =$$

$$= \varphi(x_1, \dots x_i, \dots, x_j, \dots x_q)$$; cioè $\varphi(x_1, \dots x_q) = 0$.

viceversa supponiamo che $\varphi \in L_q(E,\mathbb{R})$ verifichi la proprietà (1); allora sia τ una qualunque trasposizione $i \rightleftarrows j$

$$\varphi(x_1,.. x_i,.., x_j,.., x_q) + \varphi(x_1,.. x_j,.. x_i,.. x_q) =$$

$$= \varphi(x_1,.., x_i+x_j,.., x_i+x_j,.. x_q) +$$

$$- \varphi(x_1,.., x_i,.., x_i,.. x_q) - \varphi(x_1,.., x_j,.., x_j,.. x_q) = 0$$

cioè

$$\tau\varphi = -\varphi.$$

La proposizione precedente porta a concludere ciò che si voleva. ■

<u>Proposizione.</u> $\varphi \in L_q(E,\mathbb{R})$ è alternante se, e solo se,

(2) $$\varphi(x_1,.. x_q) = 0$$

ogni volta che $x_1,.., x_q$ sono linearmente dipendenti.

<u>**dim.**</u>

Se φ **gode** della proprietà 2, allora ovviamente è alternante, grazie alla proposizione precedente. (se sodolisfa (2) soddisfa (1)).

Inoltre se $x_1,..., x_q$ sono linearmente dipendenti esiste x_j t.c.

$$x_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i x_i$$

pertanto

$$\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_q) = \varphi(x_1,\dots,\sum_{i\neq j}\alpha_i x_i,\dots,x_q) =$$

$$= \sum_{i\neq j}\alpha_i\varphi(x_1,\dots,\underset{\uparrow_{j\text{-esimo}}}{x_i},\dots,x_q) = 0 .$$ ∎

L'insieme delle forme q-lineari alternanti risulta un sottospazio vettoriale di $L_q(E,\mathbb{R})$ che sarà indicato con $\Lambda^q(E^*)$.

Si consideri l'operatore lineare

$$A : L_q(E,\mathbb{R}) \longrightarrow L_q(E,\mathbb{R})$$

così definito

$$A(\varphi) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma}(-1)^{\sigma}\sigma\varphi$$

dove σ è una qualunque permutazione di $\{1,\dots,q\}$.

$A(\varphi)$ risulta alternante per ogni $\varphi\in L_q(E,\mathbb{R})$. Infatti se $\varepsilon\in S_q$

$$\varepsilon A(\varphi) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma}(-1)^{\sigma}\varepsilon(\sigma\varphi) =$$

$$= \frac{1}{q!}\sum_{\sigma}(-1)^{\sigma}(\varepsilon\sigma)\varphi =$$

$$= (-1)^{\varepsilon}\frac{1}{q!}\sum_{\sigma}(-1)^{\sigma\varepsilon}(\varepsilon\sigma)\varphi = (-1)^{\varepsilon}\sum_{\rho}(-1)^{\rho}\rho\varphi =$$

$$= (-1)^{\varepsilon} A(\varphi)$$

—∘—

sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di E; si consideri in $\Lambda^q(E^*)$ il sottoinsieme di $\binom{n}{q}$ elementi

$$\{ \varphi^{i_1, \dots, i_q} \}_{1 \le i_1 < \dots < i_q \le n}$$

così definiti:

$$\varphi^{i_1, \dots, i_q}(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = \begin{cases} ① \\ ② \end{cases}$$

$① = (-1)^{\binom{i_1 \dots i_q}{j_1 \dots j_q}}$ se $\binom{i_1 \quad i_q}{j_1 \dots j_q}$ è una permutazion di $i_1 \dots i_q$

$② = 0$ altrimenti.

<u>Proposizione</u>. le forme q-lineari alternanti

$$\{ \varphi^{i_1 \dots i_q} \}_{1 \le i_1 < \dots < i_q \le n}$$

costituiscono una base di $\Lambda^q(E^*)$.

<u>dim</u>

1) Sono linearmente indipendenti: sia

$$\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_q \le n} \alpha_{i_1 \dots i_q} \varphi^{i_1, \dots i_q} = 0$$

sia $(e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$ una q-upla di elementi della base di E, con $1 \le j_1 < \dots < j_q \le n$.

$$0 = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_q \le n} \alpha_{i_1 \dots i_q} \varphi^{i_1 \dots i_q}(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) =$$

$$= \alpha_{j_1 \dots j_q} = 0$$

Ripetendo il ragionamento su ogni

$$\{(e_{j_1}, \dots, e_{j_q})\}_{1 \le j_1 < \dots < j_q \le n}$$

si conclude.

ii) generano tutto $\Lambda^q(E^*)$.

Sia $\varphi \in \Lambda^q(E^*)$; e sia per $1 \le i_1 < \dots < i_q \le n$

$$\alpha_{i_1 \, i_q} \overset{def}{=} \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_q})$$

Allora

$$\varphi = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_q \le n} \alpha_{i_1 \, i_q} \varphi^{i_1 \dots i_q}$$

(completare)

$\boxed{\text{Infatti}}$

$$\varphi\Big(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1}^1 e_{i_1}, \dots, \sum_{i_q} x_{i_q}^q e_{i_q}\Big) =$$

$$= \sum_{i_1 \dots i_q} x_{i_1}^1 \, x_{i_q}^q \, \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_q}) =$$

$$= \sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \text{perm. di} \\ i_1 \dots i_q}} (-1)^{\sigma}\, x^1_{\sigma(i_1)} \cdots x^q_{\sigma(i_q)} \right) \varphi(e_{i_1},\dots,e_{i_q})$$

$$= \sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} \det \begin{bmatrix} x^1_{i_1} & & x^1_{i_q} \\ & & \\ x^q_{i_1} & & x^q_{i_q} \end{bmatrix} \varphi(e_{i_1},\dots,e_{i_q}) =$$

$$= \sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} \det \begin{bmatrix} x^1_{i_1} & & x^1_{i_q} \\ & & \\ x^q_{i_1} & & x^q_{i_q} \end{bmatrix} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_q}$$

$$= \sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} \det \begin{bmatrix} x^1_{i_1} & & x^1_{i_q} \\ & & \\ x^q_{i_1} & & x^q_{i_q} \end{bmatrix} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_q}\, \varphi^{i_1\, i_q}(e_{i_1},\dots,e_{i_q}$$

$$= \sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_q} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \text{perm.} \\ \text{di} \\ i_1,\dots,i_q}} (-1)^{\sigma}\, x^1_{\sigma(i_1)} \cdots x^q_{\sigma(i_q)} \right) \varphi^{i_1 \dots i_q}(e_{i_1},\dots e$$

$$= \sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_q} \sum_{j_1\dots j_q=1}^{n} x^1_{j_1} \quad x^q_{j_q}\, \varphi^{i_1 \dots i_q}(e_{j_1} \dots e_{j}$$

$$= \sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} \alpha_{i_1} \quad \alpha_{i_q}\, \varphi^{i_1,\dots,i_q} \Big(\sum_{j_1} x^1_{j_1} e_{j_1},\dots,\sum_{j_q} x_{j_q}$$

<u>Corollario</u>: $\Lambda^q(E^*)$ è uno spazio vettoriale di dimensione $\binom{n}{q}$.

Si consideri dopo aver definito $\Lambda^0(E^*)=\mathbb{R}$
$\Lambda^1(E^*)=E^*$

$$\Lambda(E^*) = \bigoplus_{q=0}^{n} \Lambda^q(E^*) \quad ;$$

$\Lambda(E^*)$ risulta uno spazio vettoriale (graduato) di dimensione 2^n;

Se $\varphi \in \Lambda^q(E^*)$, $\psi \in \Lambda^p(E^*)$ la forma

$$\chi = \varphi \cdot \psi$$

è una forma $p+q$-lineare, ma in generale non è alternante; si definisca dunque

$$\varphi \wedge \psi = A(\chi) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \sigma\chi \in \Lambda^{p+q}(E^*)$$

<u>Proposizione.</u> $\Lambda(E^*)$ dotata del prodotto $\wedge$ (detto prodotto esterno) risulta un'algebra associativa con unità $1 \in \Lambda^0(E^*)$ di dimensione 2^n. $\Lambda(E^*)$ è generata da 1 ed $E^* = \Lambda^1(E^*)$.
se $\varphi \in \Lambda^1(E^*)$ allora $\varphi \wedge \varphi = 0$.

dim.

Mostriamo la proprietà associativa di $\wedge$.

$\varphi \in \Lambda^q(E^*)$, $\psi \in \Lambda^p(E^*)$, $\chi \in \Lambda^s(E^*)$

$$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi = A(\varphi\psi) \wedge \chi = A(A(\varphi\psi)\chi) =$$

$$= \frac{1}{(p+q+s)!}\left(\sum_{\substack{\sigma \\ p+q+s}} (-1)^\sigma \sigma \left[\left(\frac{1}{(p+q)!}\sum_\varepsilon (-1)^\varepsilon \varepsilon\, \varphi\psi\right)\chi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{(p+q+s)!}\left(\sum_{\substack{\sigma \\ p+q+s}} (-1)^\sigma \sigma \left[\frac{1}{(p+q)!}\sum_\varepsilon (-1)^\varepsilon (\varepsilon(\varphi\psi))\chi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!(p+q+s)!}\left(\sum_{\sigma,\varepsilon} (-1)^\sigma (-1)^\varepsilon\, \sigma((\varepsilon(\varphi\psi))\chi)\right) = \frac{1}{(p+q)!(p+q+s)!}\sum_{\sigma,\varepsilon} (-1)^\sigma (-1)^\varepsilon \cdot (\sigma\varepsilon)\varepsilon^{-1}\varepsilon$$

$$= \frac{1}{(p+q+s)!}\sum_{\rho \in S_{p+q+s}} (-1)^\rho \rho(\varphi\psi\chi)$$

Con gli stessi conti si dimostra che

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) = \frac{1}{(p+q+s)}\sum_{\rho \in S_{p+q+s}} (-1)^\rho \rho(\varphi\psi\chi) \; ;$$

naturalmente se $\varphi \in \Lambda^q(E^*)$

$$1 \wedge \varphi = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma \sigma\varphi = \frac{1}{q!}\sum_\sigma (-1)^\sigma (-1)^\sigma \varphi =$$

$$= \frac{1}{q!}\sum_\sigma \varphi = \varphi .$$

e si ha che, scegliendo $e_1^*, \dots, e_n^*$ come base duale della base $e_1 \dots e_n$ di E, l'insieme

$$\{ e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_q}^* \}_{1 \le i_1 < \dots < i_q \le n}$$

è una base di $\Lambda^q(E^*)$; infatti si dimostra che

$$q!\, e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_q}^* = \varphi^{i_1 \dots i_q}$$

definito a suo tempo per $1 \le i_1 < \dots < i_q \le n$.
Basta calcolarsi le coordinate di $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_q}^*$ rispetto alla base $\varphi^{i_1 \dots i_q}$ $(1 \le i_1 < \dots < i_q \le n)$, cioè calcolarlo sulle q-uple di elementi $(e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$ con $1 \le j_1 < \dots < j_q \le n$; si ha

$$e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_q}^* (e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) =$$

$$= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma e_{i_1}^* (e_{j_{\sigma(1)}}) \cdots e_{i_q}^* (e_{j_{\sigma(q)}}) =$$

$$= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma \delta_{i_1 j_{\sigma(1)}} \cdots \delta_{i_q j_{\sigma(q)}} = \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$$

(1) $= \frac{1}{q!} (-1)^{\binom{i_1 \dots i_q}{j_1 \dots j_q}}$ se $\binom{i_1 \dots i_q}{j_1 \dots j_q}$ è una permutazione di $\{i_1, \dots, i_q\}$

(2) $= 0$ altrimenti

L'algebra $\Lambda(E^*)$ non è commutativa ; infatti se $\varphi \in \Lambda^p(E^*)$, $\psi \in \Lambda^q(E^*)$ allora

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \varphi$$

dim.

$$\varphi \wedge \psi = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma \sigma(\varphi\psi) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma \sigma(\tau(\psi\varphi)) =$$

dove $\tau = \begin{pmatrix} 1, \dots, p, p+1, \dots, p+q \\ q+1, \dots, q+p, 1, \dots, q \end{pmatrix}$

$$= \frac{(-1)^\tau}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma (-1)^\tau (\sigma\tau)(\psi\varphi) =$$

$$= (-1)^\tau \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma (\sigma(\psi\varphi))$$

$$= (-1)^\tau \psi \wedge \varphi = (-1)^{pq} \psi \wedge \varphi$$

<u>Corollario</u>

$$\varphi \wedge \varphi = 0 \qquad \forall \ \varphi \in \Lambda^1(E^*)$$