Eulero e i poliedri

è nota la relazione

$$V + F - S = 2$$

V = numero dei vertici

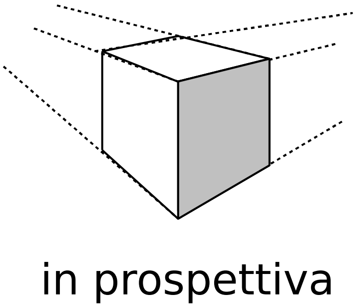
F = numero delle facce

S = numero degli spigoli

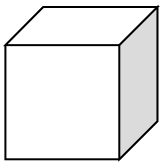
- perché ?
- per quali poliedri ?
- conseguenze ?

Perché V + F - S = 2 ?

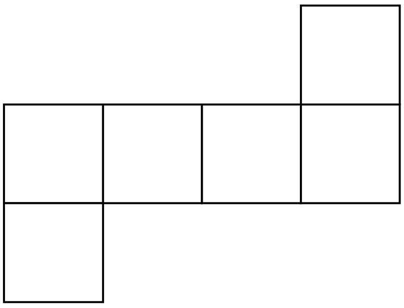
Vari modi di rappresentare un poliedro:



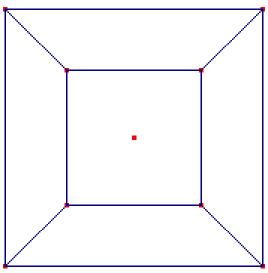
in prospettiva



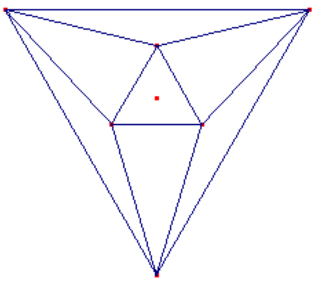
in assonometria



con uno sviluppo



Cubo

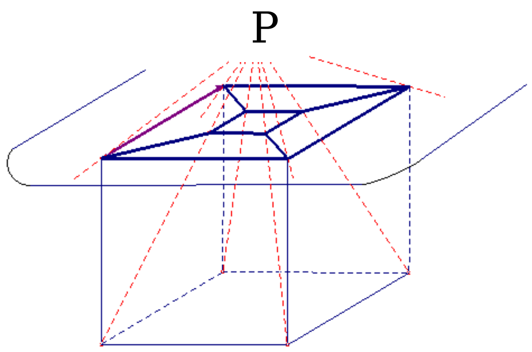


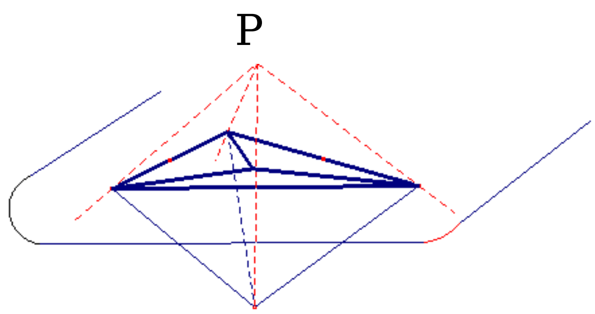
Ottaedro

rete piana …… grafo …. diagramma di Schlegel

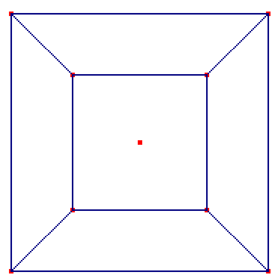
un modo di costruire un diagramma di Schleghel

si proietta il poliedro sul piano di una sua faccia F da un punto P esterno al poliedro e vicino alla faccia considerata

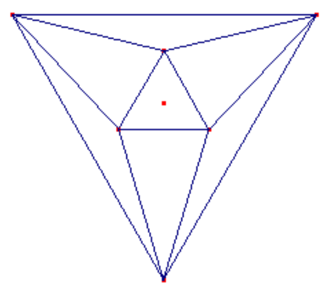




il punto P deve essere scelto in modo tale che le proiezioni degli altri vertici del poliedro risultino interne alla proiezione della faccia considerata, la faccia F coincide con la sua proiezione .



Cubo



Ottaedro

- ad ogni vertice e ad ogni spigolo del poliedro corrisponde rispettivamente un vertice e uno spigolo del diagramma

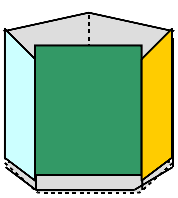
- ad ogni faccia <u>diversa</u> da F del poliedro corrisponde una cella del diagramma
- a F facciamo corrispondere la parte di piano esterna al diagramma

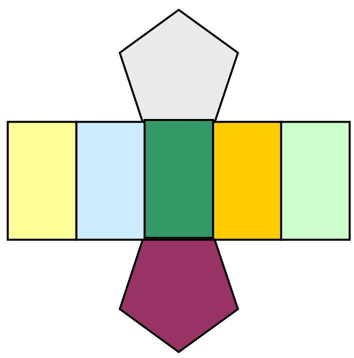
intuitivamente:

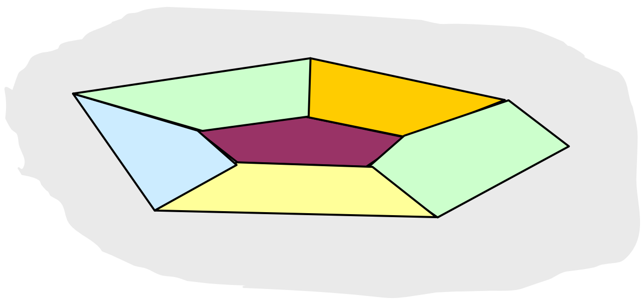
Immaginiamo la superficie del poliedro costituita di gomma sottile e infinitamente elastica:

- facciamo un forellino all’interno di una faccia e deformiamo la superficie in modo da renderla piana
- otteniamo una rete piana

- S e V e F restano immutati, tenendo conto che la faccia ‘forata’ si è distesa lungo tutto il piano, esternamente al diagramma







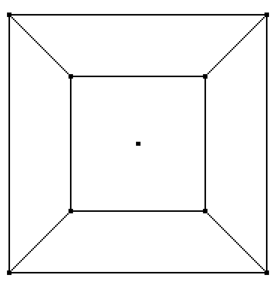
la relazione di Eulero

- non riguarda aspetti metrici di un poliedro, ma soltanto il numero di facce, vertici e spigoli

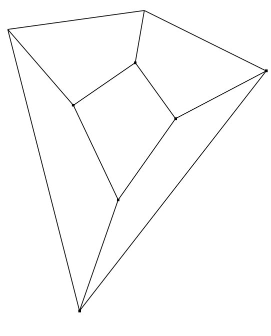
- è una relazione topologica non metrica

- per dimostrarla si può usare una rappresentazione equivalente al poliedro dal punto di vista topologico

- si può usare perciò un diagramma di Schleghel



Cubo



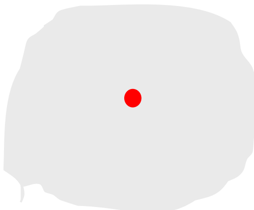
diagrammi equivalenti corrispondenti a un cubo

dimostrazione della relazione di E.

dimostriamo che la relazione vale per una qualsiasi rete piana, e quindi per un qualsiasi poliedro del quale possa essere costruito un diagramma di Schlegel.

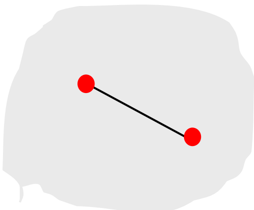
(1)

Partiamo da una rete originaria costituita da un solo vertice



$$V - S + F = 1 - 0 + 1 = 2$$

aggiungiamo uno spigolo e un vertice:



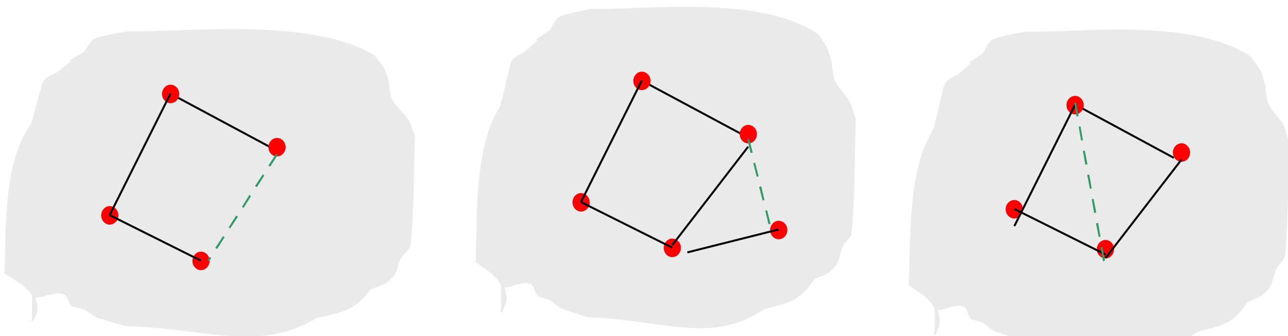
$$V - S + F = 2 - 1 + 1 = 2$$

Aggiungiamo via via , nuovi vertici e nuovi spigoli
quando aggiungiamo un nuovo spigolo può darsi che

- esso congiunga un vertice già esistente con uno nuovo

- congiunga due vertici già esistenti.

- V e S aumentano di 1, F resta immutato



- F e S aumentano di 1, V non cambia

in entrambi i casi la somma V – S + F, resta invariata.

Il valore 2 si mantiene inalterato nell'intera costruzione:

dunque

per una qualsiasi rete piana, e in particolare, per ogni diagramma di Schlegel vale

$$V - S + F = 2$$

dunque **vale** quando V, S e F sono il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce di un poliedro <u>che possa essere rappresentato in questo modo.</u>

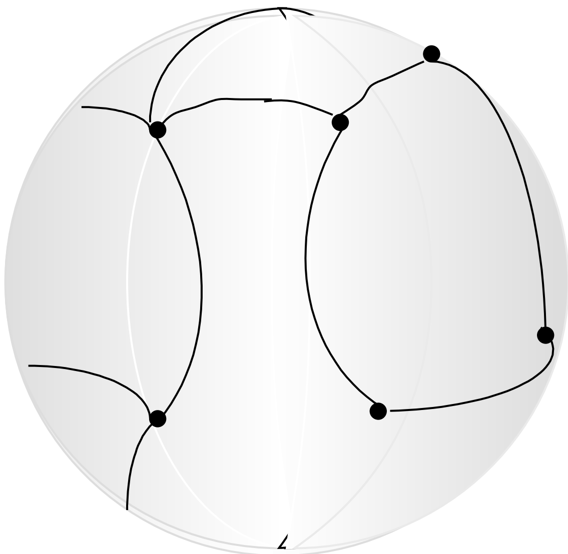
(2)

Consideriamo una sfera che ha centro in un punto O, interno al poliedro e raggio r sufficientemente grande da far sì che la sfera contenga tutto il poliedro.
Proiettiamo da O vertici e spigoli del poliedro sulla sfera:

sulla superficie sferica

- ad ogni vertice del poliedro corrisponde un punto
- ad ogni spigolo un arco di circonferenza massima
- ad ogni faccia un poligono sferico.

I poligoni sferici ottenuti hanno in comune soltanto punti del loro contorno e la loro unione ricopre tutta la superficie sferica.



Indichiamo con

Q_i (i = 1, 2, ..., F) il generico poligono sferico ottenuto,

e con

s_i il numero dei suoi lati;

ricordiamo che:

- per i triangoli sferici vale la relazione:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = (\text{area di T}) / r^2$$

(formula di Girard , dove $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ è l'eccesso angolare del triangolo T

- l'eccesso angolare è additivo

perciò:

somma ampiezze angoli di $Q_i = (s_i - 2)\pi + (\text{area di } Q_i) / r^2$

Sommiamo membro a membro le relazioni relative a ciascuno degli F poligoni sferici:

$$\sum_{i=1}^{F} (\text{somma amp. angoli } Q_i) = \sum_{i=1}^{F} (s_i - 2)\pi + \sum_{i=1}^{F} \frac{\text{area } Q_i}{r^2}$$

poiché:

$$\sum_{i=1}^{F} (\text{somma ampiezze angoli } Q_i) = 2\pi V$$

$$\sum_{i=1}^{F} (s_i - 2)\pi = \pi \sum_{i=1}^{F} s_i - \sum_{i=1}^{F} 2\pi = 2\pi S - 2\pi F$$

$$\sum_{i=1}^{F} \frac{\text{area } Q_i}{r^2} = \frac{\text{area sfera}}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

perciò:

$$2\pi V = 2\pi S - 2\pi F + 4\pi$$

ossia:

$$\mathbf{V + F - S = 2}$$

per quali poliedri ?

la formula di Eulero vale per i poliedri topologicamente

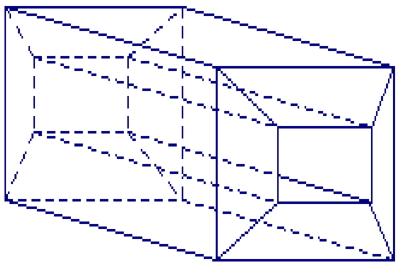
equivalenti ad una sfera.

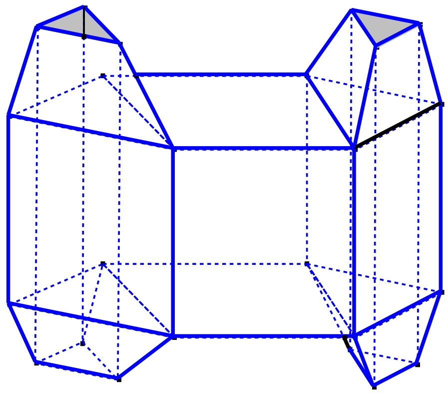
ossia per quei poliedri che possono essere trasformati con continuità e senza strappi in una sfera.

(si può pensare di gonfiare il poliedro come un palloncino ……)

in effetti i poliedri fino a qui considerati sono di questo tipo

per altri poliedri ?



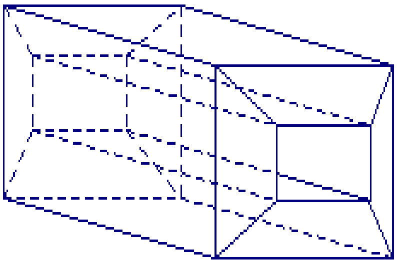


V = 16
F = 16
S = 32

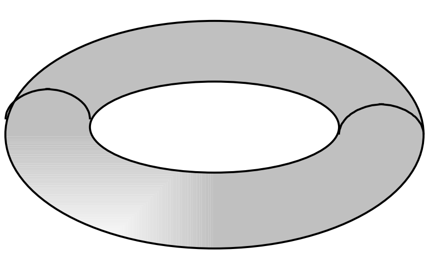
F + V – S = 0

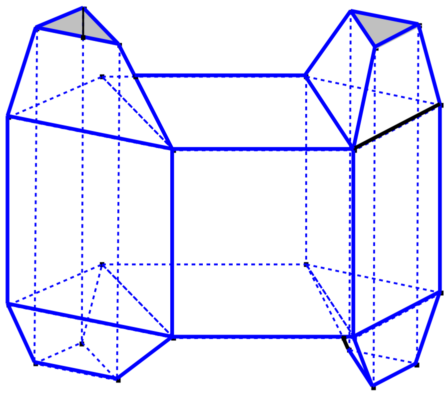
V = 24
F = 26
S = 52

F + V – S = -2

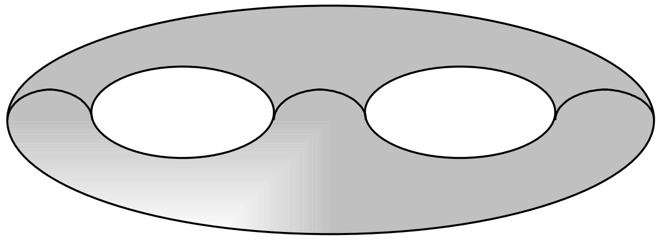


è topologicamente equivalente a una ciambella con un solo “buco”

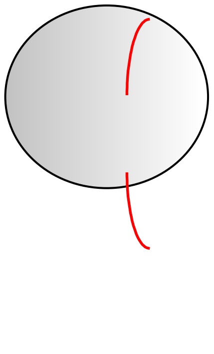




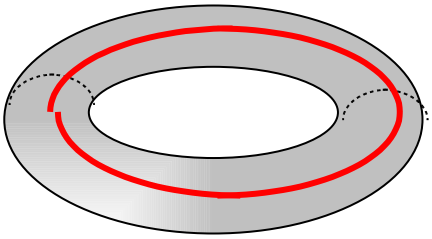
è topologicamente equivalente a una ciambella con due “buchi”



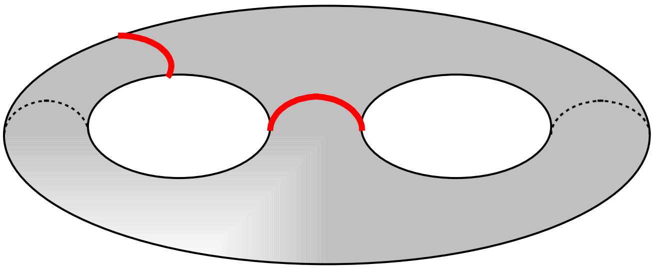
genere di una superficie: è il numero massimo di tagli (curve chiuse appartenenti alla superficie) che <u>non si intersecano</u> che possono essere eseguiti su una superficie senza che essa si disconnetta



genere 0



genere 1



genere 2

si dice che un poliedro é di genere *p* se la sua superficie è topologicamente equivalente a una superficie di genere *p*

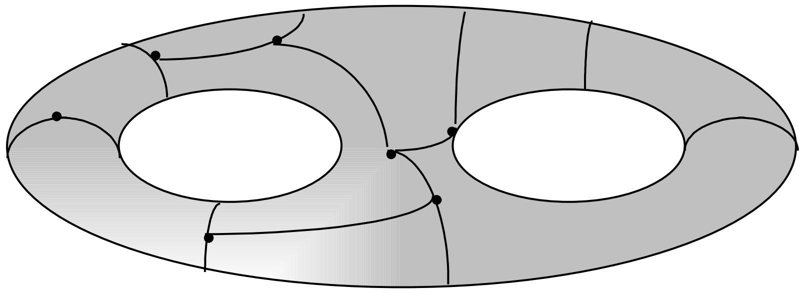
....

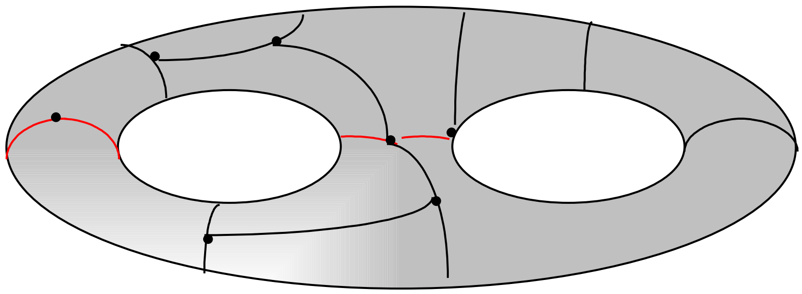
per un poliedro di genere *p* :

$$V + F - S = 2 - 2p$$

perché ?

consideriamo la “tassellazione” di una superficie equivalente ad un poliedro

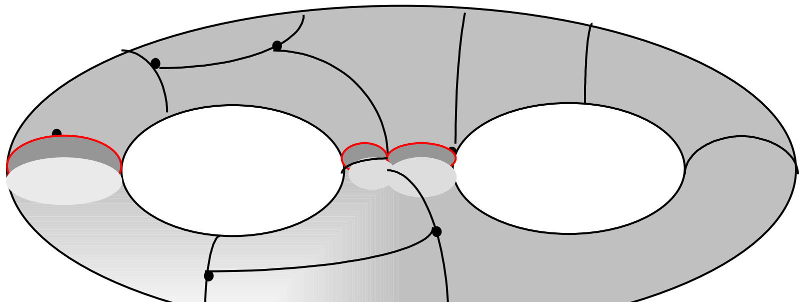




V = num. vertici

F = num. facce

S = num. spigoli



Tagliamo la superficie S lungo p contorni della tassellazione sui quali si trovano rispettivamente

$n_1,..\ ,n_p$ vertici e $n_1,..\ ,n_p$ spigoli

in modo da ottenere una superficie S' di genere 0
dove

V' = num. vertici $\quad V' = V + n_1 + .. + n_p$
F' = num. facce $\quad F' = F + 2p$
S'= num. spigoli $\quad S' = S + n_1 + .. + n_p$

per la S' si ha $\quad V' + F' - S' = 2$

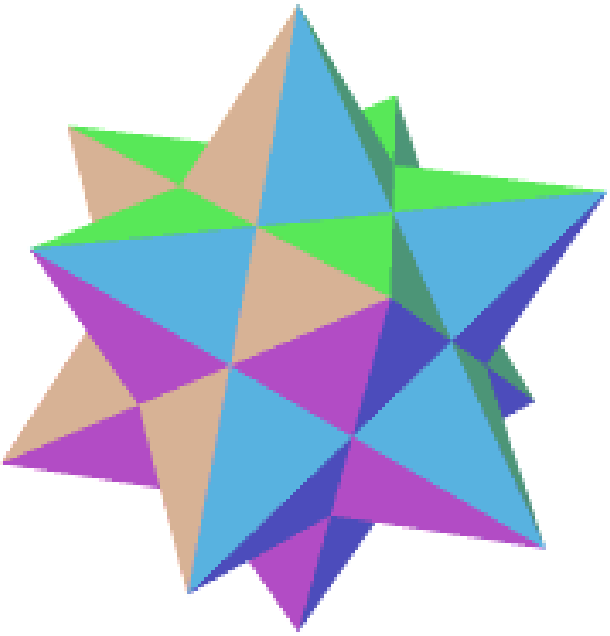
ovvero

$V + n_1 + .. + n_p + F + 2p - S - n_1 - .. - n_p = 2$
da cui

$$V + F - S = 2 - 2p$$

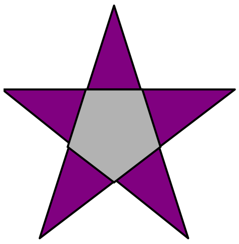
2 – 2p è la caratteristica di Eulero della superficie

Piccolo dodecaedro stellato



poliedro regolare
(Keplero 1571 – 1630, Poinsot 1777 - 1859

le facce sono dodici pentagoni regolari stellati

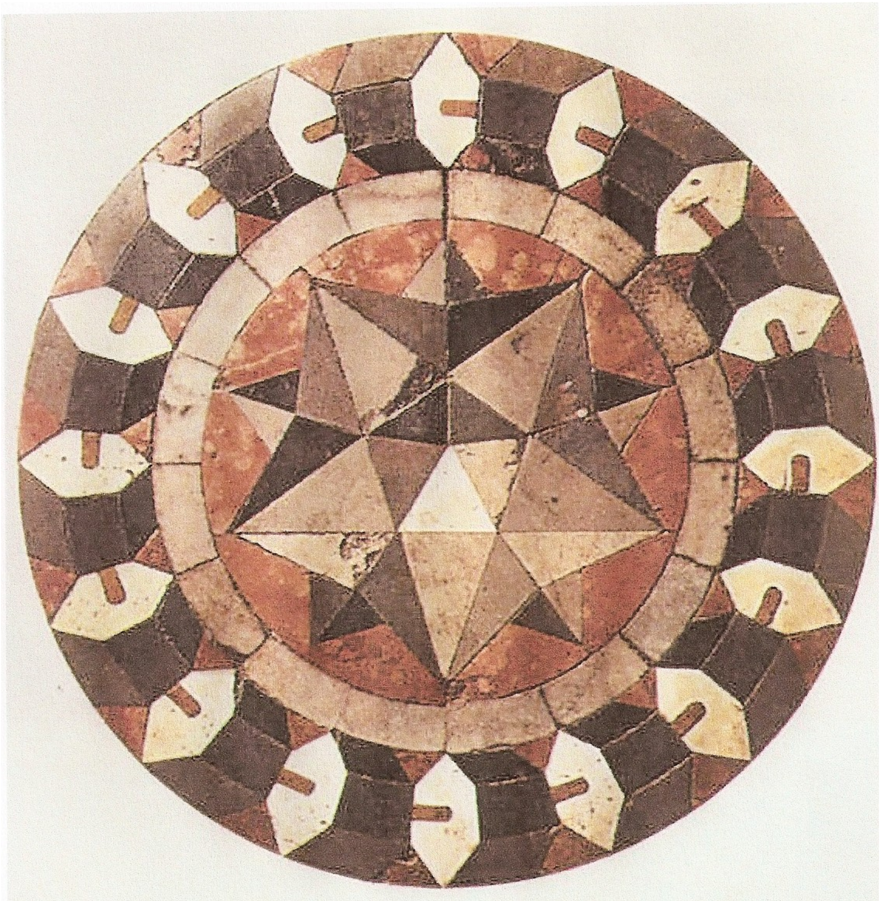


ogni lato è comune a due facce
in ogni vertice concorrono cinque facce
le facce si attraversano

V = 12   F = 12   S = 30   V + F – S = - 6   ?

'ingenuamente':

V' = 32   F' = 60   S' = 90   V' + F' – S' = 2 ?



Pavimento della
Basilica di San Marco a Venezia

Paolo Uccello (1397 – 1475)

Conseguenze della relazione di Eulero

- Cosa dire di un poliedro con facce pentagonali ed esagonali e tale che in ogni vertice concorrano tre spigoli (valenza 3)

F_5 = numero facce pentagonali
F_6 = numero facce esagonali

$$F_5 + F_6 + (5F_5 + 6\ F_6) / 3 - (5F_5 + 6\ F_6) / 2 = 2$$

$$F_5\,(1 + 5/3 - 5/2) + F_6(1 + 2 - 3) = 2$$

$$F_5 / 6 = 2$$

$$F_5 = 12$$

I pentagoni devono essere 12 !

icosaedro tronco

$F_5 = 12$ $F_6 = 20$

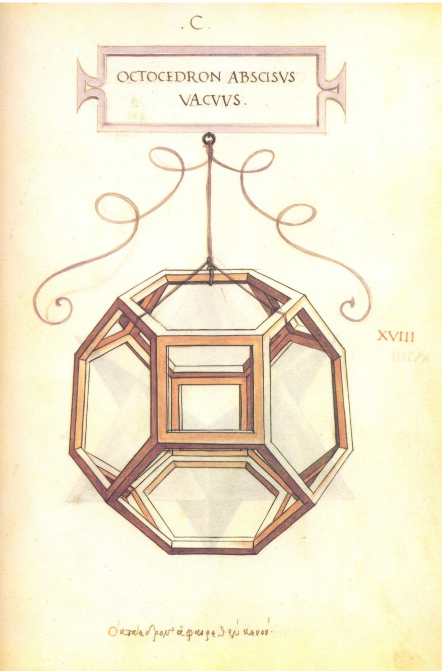
- poliedro con facce quadrangolari ed esagonali e con vertici di valenza 3

$$F_4 + F_6 + (4F_4 + 6\,F_6) / 3 - (4F_4 + 6\,F_6) / 2 = 2$$

$$F_4\,(1 + 4/3 – 2) + F_6(1 + 2 – 3) = 2$$

$$F_4 / 3 \;=\; 2$$

$$F_4 = \;6$$



ottaedro tronco

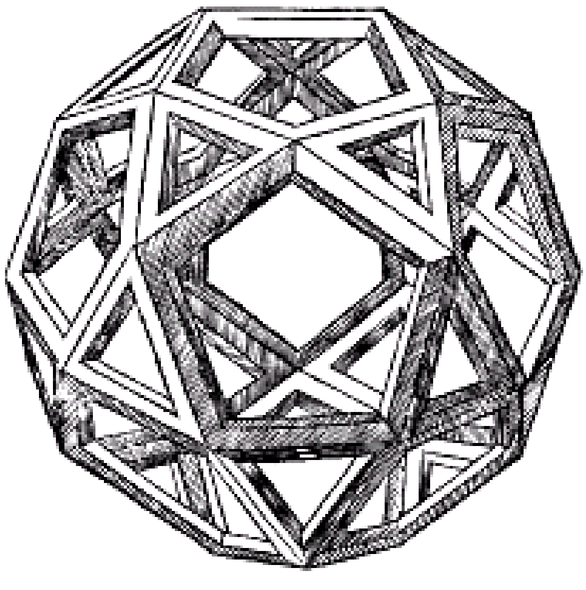
- poliedro con facce pentagonali e triangolari e con vertici di valenza 4

$$F_5 + F_3 + (5F_5 + 3\ F_3) / 4 - (5F_5 + 3\ F_3) / 2 = 2$$

$$F_5\,(1 + 5/4 – 5/2) + F_3(1 + 3/4 – 3/2) = 2$$

$$F_3/4 - F_5 / 4 = 2$$

$$F_3 - F_5 = 8$$



icosidodecaedro

$F_3 = 20$
$F_5 = 12$

Una nuova relazione

p = numero <u>medio</u> spigoli per faccia

q = numero <u>medio</u> spigoli per vertice

$p = 2S/F \quad q = 2S/V$ da cui

$F = 2S/p \quad V = 2S/q$

$2S/p + 2S/q - S = 2$

$1/p + 1/q - 1/2 = 1/S$

$1/p + 1/q = 1/2 + 1/S$

$1/p + 1/q > 1/2$

- non possono esistere poliedri con sette spigoli

infatti, se così fosse $F + V = 9$

poiché $F \geq 4$ e $V \geq 4$

due possibilità :

$F = 4$ e $V = 5$
e allora $q = 14/5 < 3$

casi impossibili

$F = 5$ e $V = 4$
e allora $p = 14/5 < 3$,

- ogni poliedro presenta almeno un vertice di valenza 3 o almeno una faccia triangolare

vogliamo dimostrare che

$$(V_3) \vee (F_3) \qquad (*)$$

dimostreremo che è impossibile la negazione della (*)
ossia della

$$(V_3)' \wedge (F_3)'$$

$$(V_3)' \rightarrow \quad q \geq 4 \qquad (F_3)' \rightarrow p \geq 4$$

$1/q \leq 1/4 \qquad 1/p \leq 1/4$

$1/q + 1/p \leq 1/2$ caso impossibile

Definizione di poliedro

1. l'intersezione di due facce, se non è vuota, è uno spigolo o un vertice comune alle due facce

2. ogni spigolo appartiene esattamente a due facce

3. due facce adiacenti non sono complanari

4. comunque si fissi un vertice V e due facce *f* e *g* che lo comprendono, esiste una catena di facce, tutte contenenti V, che va da *f* a *g*

il poliedro si dice semplicemente connesso se

5. comunque si fissi una poligonale formata da spigoli del poliedro, questa è il bordo dell'unione di un certo numero di facce del poliedro stesso

non soddisfano le condizioni date le figure seguenti: