

Viareggio, 7 settembre 2007

**Su alcuni problemi di probabilità,
con un'appendice di geometria
(Claudio Bernardi - Roma)**

io vorrei studenti interessati,
che non cerchino di azzeccare le risposte,
non comincino subito a fare calcoli applicando la prima formula che viene in mente,
si sforzino di ragionare

gli esercizi tecnici sono inevitabili

ma, *qualche volta*, si possono proporre domande di tipo diverso

vediamo alcuni problemi di probabilità,
tutt'altro che banali

non sono necessari calcoli complicati
(non serve il calcolo combinatorio)

non si arriva al risultato con procedimenti automatici

anche chi ha studiato può sbagliare
anzi, in qualche caso si può discutere su quale sia la risposta giusta

alcuni dei problemi sono tratti dalle riviste

«*Archimede*»

«*The Mathematical Intelligencer*»

Viareggio, 7 settembre 2007

Su alcuni problemi di probabilità, con un'appendice di geometria (in onore di Eulero)

Claudio Bernardi - Roma

1 (*senza calcoli*) Si estrae casualmente una carta da un mazzo di 40 carte e, dopo averla rimessa nel mazzo, si ripete l'esperimento. Qual è la probabilità che, nelle due estrazioni, sia estratta la stessa carta?

2. (*Dal test di ammissione alla SSIS - 2006*)

(*ancora senza calcoli*) Un'urna contiene r palline rosse ed n nere. Si estrae una pallina e, senza rimetterla nell'urna, si estrae una seconda pallina. Si considerino i due eventi seguenti:

X = la prima pallina è rossa

Y = la seconda pallina è rossa

Allora

A) la probabilità di X è maggiore della probabilità di Y

B) la probabilità di X è minore della probabilità di Y

C) le probabilità di X e di Y sono uguali

D) non si possono confrontare le probabilità di X e di Y senza conoscere n

E) non si possono confrontare le probabilità di X e di Y senza conoscere r

[risposte esatte 12%; non ha risposto il 27%; risposte errate 61%]

3 (*il «53» a Venezia*) Nel gennaio 2004 in Italia sono stati giocati al lotto 652,1 milioni di euro (il che equivale a circa ... euro a testa) e sono stati vinti 303,6 milioni di euro.

Nel gennaio 2005 sono stati giocati al lotto 1201,9 milioni di euro (in media circa ... euro a testa) e sono stati vinti 300,4 milioni di euro.

Come si spiegano questi dati?

(*Il 53 è uscito sulla ruota di Venezia il 9 febbraio 2005 dopo un'assenza durata 182 estrazioni; si parla di vincite per circa 700 milioni di euro.*)

4 (*scandalo al lotto*) Pochi anni fa è stata scoperta una grossa irregolarità nelle estrazioni nel lotto a Milano: l'estrazione era truccata, cioè qualcuno riusciva a fare estrarre determinati numeri. In questo modo, naturalmente, poteva realizzare guadagni cospicui (e illeciti).

E' fuori discussione che quel qualcuno era un imbroglione, ma ... chi è stato imbrogliato?

Sicuramente lo Stato, in quanto gestore del gioco e pagatore dei premi. Ma alcune Associazioni di consumatori hanno sporto denuncia, ritenendo che ci sia stata una truffa anche verso tutti gli altri giocatori, perché era stato alterato il meccanismo d'estrazione. Avevano ragione o torto?

5 (*interrogazione casuale*) Un docente ha l'abitudine di estrarre a sorte lo studente da interrogare. Per l'estrazione, apre casualmente un libro, somma le cifre che compongono il numero della pagina e chiama lo studente che corrisponde nel registro di classe alla somma ottenuta. (Si suppone che il numero delle pagine del libro sia compreso fra 100 e 1000, e che la classe abbia non più di 27 studenti.)

E' equo questo metodo, cioè è vero che tutti gli studenti hanno ugual probabilità di essere interrogati?

6 (*titoli a sorte*) Il giorno dell'esame finale della SSIS, ogni candidato estrae da un'urna tre titoli per la lezione, li legge e ne sceglie uno. La Commissione ha deciso che i titoli estratti non siano rimessi nell'urna; pertanto, gli ultimi candidati si trovano un'urna con meno titoli dei primi.

Uno degli ultimi candidati protesta, perché sono già stati estratti alcuni titoli sui quali si sentiva preparato: siccome i titoli estratti non sono rimessi nell'urna, si trova in condizioni sfavorevoli rispetto ai candidati che hanno estratto i titoli prima di lui. Ha torto o ha ragione?

7 (*civiltà maschilista*) In un lontano stato, il re vuole incrementare la nascita di maschi e scoraggiare la nascita di femmine. A questo scopo, emana una legge che vieta alle coppie che hanno avuto una figlia femmina di avere altri figli. Così, le famiglie saranno composte da soli figli maschi, oppure, nel caso di presenza di una femmina, questa non avrà sorelle, mentre potrebbe avere fratelli nati prima di lei. E' efficace questa legge?

8 (*Un problema recente*). A tre persone viene messo un cappello, scelto a caso (con uguale probabilità) fra un cappello bianco e un cappello nero.

Ciascuno vede il cappello degli altri, ma non il proprio. Viene chiesto a ciascuno dei tre di indicare il colore del proprio cappello. Le risposte sono date contemporaneamente (nessuno sente altre risposte).

Le tre persone «vincono» se almeno due indovinano il colore corretto.

Qual è la strategia migliore?

9 (*questione di simmetria*) Qual è la probabilità di ottenere almeno 2 teste lanciando 3 monete?

10 (*una situazione asimmetrica*) Di fronte alla casa di Tizio passano due linee di autobus, la n. 1 e la n. 2. Si suppone che gli autobus passino in orari diversi, che abbiano la stessa frequenza (ad esempio, ogni 10 minuti) e che siano sempre puntuali. Tizio prende usualmente l'autobus n. 1.

Quando, uscito di casa, aspetta l'autobus, Tizio vede quasi sempre passare l'autobus n. 2 prima dell'autobus n. 1. Tizio esce di casa in orari casuali e non riesce a spiegarsi la situazione.

Tizio conclude di essere perseguitato dalla sfortuna. Ha ragione?

11.a (*scommessa casuale*) Giorgio scommette sull'esito di una partita di pallacanestro fra le squadre X ed Y (non è previsto il pareggio). Non conoscendo le due squadre, decide di affidarsi alla sorte e di lanciare una moneta perfettamente equilibrata: se viene testa punterà sulla vittoria di X, se viene croce punterà su Y. La probabilità che Giorgio vinca la scommessa è:

- A sempre $1/2$
- B sempre maggiore di $1/2$
- C sempre minore di $1/2$
- D maggiore o minore di $1/2$ a seconda del valore delle squadre

NB Si intende che la probabilità sia valutata da qualcuno che conosce le squadre X ed Y.

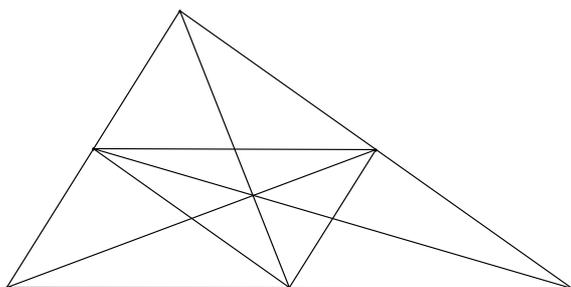
11.b (*seconda scommessa*) Anche Marco scommette sull'esito di una partita di pallacanestro fra le squadre X ed Y. Non conoscendo le due squadre, decide di affidarsi alla sorte e di lanciare una moneta non equilibrata, con $p(\text{testa}) = t > 1/2$: se viene testa punterà sulla vittoria di X, se viene croce punterà su Y. La probabilità che Giorgio vinca la scommessa è:

- A sempre $1/2$
- B dipende da t ma non dal valore delle due squadre
- C dipende dal valore delle due squadre ma non da t
- D dipende sia da t sia dal valore delle due squadre

[Suggerimento per il n. 8. Pensiamo che le tre persone siano sedute intorno ad un tavolo circolare; chi vede due cappelli di colore diverso risponde indicando il colore della persona alla sua destra; chi vede due cappelli dello stesso colore risponde indicando ... Se i tre cappelli sono tutti e tre dello stesso colore (il che si verifica con probabilità 25%), allora le tre persone perdono. In caso contrario, invece, le tre persone vincono]
[Risposte per il n. 11: A; D]

La retta di Eulero.

In un qualunque triangolo ABC, l'ortocentro H, il baricentro G, il circocentro O sono allineati. La retta che li contiene si chiama *retta di Eulero*.



Siano A' , B' , C' i punti medi dei lati del triangolo. Consideriamo il triangolo $A'B'C'$ (triangolo *mediale*).

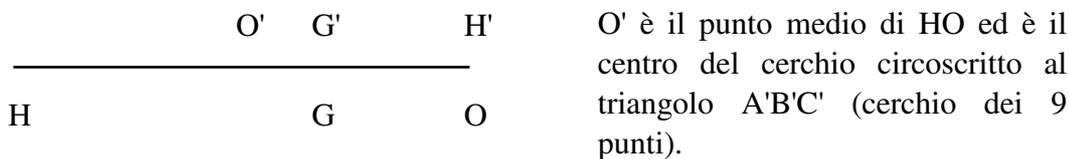
Il baricentro G di ABC è anche il baricentro del triangolo mediale $A'B'C'$.

Si può dire di più: i due triangoli ABC ed $A'B'C'$ si corrispondono nell'omotetia di centro G e rapporto $-1/2$.

Nella stessa omotetia, all'ortocentro H di ABC corrisponde l'ortocentro H' di A'B'C'.
Quindi, i punti H, G, H' sono allineati.

Ma l'ortocentro H' di A'B'C' coincide con il circocentro O di ABC.

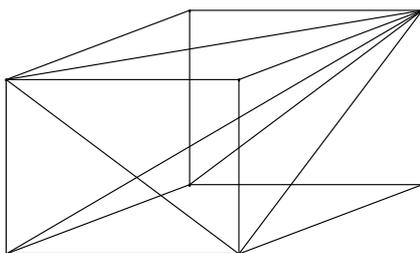
Conclusione: i punti H, G, O sono allineati; inoltre, $HG = 2 GO$.



Alla ricerca di soluzioni intere

Esiste un parallelepipedo rettangolo in cui le lunghezze dei tre spigoli, delle tre diagonali delle facce e della diagonale "interna" sono tutte espresse da numeri interi?

In termini algebrici, si tratta di trovare tre numeri interi positivi a, b, c , tali che siano interi anche: $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $y = \sqrt{b^2 + c^2}$, $z = \sqrt{c^2 + a^2}$, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Non si conosce alcun esempio, ma, al contempo, non si conosce una dimostrazione che escluda l'esistenza di sette numeri nelle condizioni dette.

Se una soluzione esiste o tutti i numeri sono pari, oppure sono pari le lunghezze di due spigoli e di una diagonale, mentre le altre lunghezze sono dispari.

Alcuni esempi.

| a | b | c | $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ | $y = \sqrt{b^2 + c^2}$ | $z = \sqrt{c^2 + a^2}$ | $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ |
|---|-----------------|-----------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------------|
| 1 | 2 | 2 | $\sqrt{5}$ | $2\sqrt{2}$ | $\sqrt{5}$ | 3 |
| 3 | 4 | 12 | 5 | $4\sqrt{10}$ | $3\sqrt{17}$ | 13 |
| 44 | 117 | 240 | 125 | 267 | 244 | $5\sqrt{2929}$ |
| Il caso precedente è un esempio di <i>terna trirettangola</i> dovuta ad Halcke, 1719. Eulero conosceva questa terna e sapeva che si trattava della più piccola terna trirettangola. | | | | | | |
| Se (p, q, r) è una terna pitagorica, allora si ottiene una terna trirettangola così: | | | | | | |
| $p(4q^2 - r^2)$ | $q(4p^2 - r^2)$ | $4pqr$ | r^3 | $q(4p^2 + r^2)$ | $p(4q^2 + r^2)$ | ... |
| Infine, due esempi in cui solo uno dei sette numeri è irrazionale | | | | | | |
| 124 | 957 | $120\sqrt{962}$ | 965 | 3843 | 3724 | 3845 |
| 104 | 153 | 672 | 185 | $3\sqrt{52777}$ | 680 | 697 |

Anche quest'ultima riga era nota ad Eulero ...