

# IL PROGETTO “MATEMATICA ELEMENTARE”

Jacopo D'Aurizio e Rosario Mennuni

Università di Pisa - Dipartimento di Matematica

2 settembre 2012

# Genesi del progetto

Il progetto "*Matematica Elementare*" nasce ad aprile 2012, all'interno del Dipartimento di Matematica di Pisa, sotto la spinta propulsiva di due idee piuttosto distanti:

- ▶ la realizzazione di un sostanziale ampliamento delle Schede Olimpiche del Professor Massimo Gobbino, da molto tempo punto di riferimento tecnico-teorico per coloro che competono nelle Olimpiadi della Matematica;
- ▶ la realizzazione di un libro di testo per le Scuole Superiori, ove incrementare sia l'estensione che la profondità dei concetti usualmente trattati, colmando delle evidenti lacune presenti nel programma ministeriale e nei libri di testo. Gravosi e affermati omissis riguardano specialmente l'aritmetica, la combinatoria e la geometria sintetica, verso le quali si sentiamo in dovere di restituire importanza e dignità, azzardando un'operazione innovativa, di ristrutturazione dalle fondamenta.

# Ulteriori ambizioni I

L'attuale progetto è perciò teso alla realizzazione di un libro di testo che possa essere utilizzato come riferimento o come sussidio nelle Scuole Superiori, ma che possa accompagnare il suo fruitore ben oltre la formazione propriamente scolare.

L'attinenza al nome "Matematica Elementare" è uno dei nostri maggiori punti di riferimento: attraverso una trattazione rigorosamente autocontenuta, vorremmo guidare il lettore, passo dopo passo e mattone dopo mattone, alla comprensione delle idee e dei risultati che contraddistinguono tale sostanziosa parte della Matematica.

L'integrazione del programma ministeriale consiste soprattutto nel trattamento dell'aritmetica modulare, delle prime nozioni di teoria dei gruppi, di teoria dei numeri e di matematica discreta, nella precoce introduzione delle serie (al fine di sottolineare diversi legami tra analisi ed algebra, nonché presentare funzioni regolari e costanti notevoli attraverso

## Ulteriori ambizioni II

numerosi percorsi confluenti) e in un più vasto excursus riguardo la geometria sintetica, le trasformazioni del piano e i concetti di lunghezza ed area.

Allo scopo di fornire una soddisfacente panoramica a tutto tondo, è stato necessario intraprendere diverse scelte coraggiose, specie per quanto riguarda l'ordine di presentazione di alcuni argomenti e la collocazione e la tipologia degli esercizi presenti. Paradigmatico è il caso del quarto capitolo, d'introduzione all'analisi, dove vengono passati in rassegna i seguenti punti:

- ▶ disuguaglianze tra le medie e Cauchy-Schwarz;
- ▶ spazi normati e metrici, numeri complessi;
- ▶ elementi di topologia;
- ▶ successioni convergenti e di Cauchy, teoremi a riguardo;
- ▶ limiti, continuità (metrica e topologica), serie, criteri di convergenza;

# Ulteriori ambizioni III

- ▶ derivate e convessità;
- ▶ la costante di Nepero come limite e come serie;
- ▶ la funzione logaritmo e la funzione esponenziale complessa;
- ▶ la costante  $\pi$  come periodo dell'esponenziale complesso;
- ▶ le funzioni trigonometriche, iperboliche e le rispettive inverse;
- ▶ il prodotto di Wallis e la formula di Stirling;
- ▶ alcuni risultati di densità dei polinomi tra le funzioni continue (Weierstrass, Chebyshev);
- ▶ alcuni teoremi di punto fisso (Banach-Caccioppoli, Sharkovsky, Brouwer, Lusternik-Schnirelmann, Borsuk-Ulam).

## Ulteriori ambizioni IV

L'ordine di presentazione degli argomenti rispecchia un certo gusto combinatorio, nonché un criterio di massima economicità nel giungere a stabilire i risultati cardine di ogni capitolo e gli stretti legami tra i diversi settori della matematica. Gli esercizi sono collocati sia all'interno dei capitoli che in fondo agli stessi; quelli presenti all'interno sono sempre svolti e ricoprono un ruolo importante nel rivelare le potenzialità applicative della teoria esposta; in generale, sono estremamente diversificati tra loro e molto gradualmente nell'ascesa di difficoltà.

# Cosa siamo attualmente

Il coordinatore del progetto è il Professor Franco Favilli, il responsabile è il Dottor Jacopo D'Aurizio. I contributi dei partecipanti, studenti di Matematica e Informatica presso l'Università di Pisa, vengono discussi settimanalmente (ogni venerdì) presso il Laboratorio Didattico del Dipartimento di Matematica di Pisa. Ci avvaliamo inoltre del supporto di una mailing-list e di un wiki.

# Il nostro canovaccio I

- ▶ **FONDAZIONE:** Logica proposizionale e quantificatori, relazioni e funzioni, cardinalità. Concetto di quoziente. Assiomi di Peano, numeri naturali, operazioni (somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione), proprietà (distributiva, associativa etc). Simboli di sommatoria e produttoria. Teoria degli insiemi (minimale), principio dei cassetti, principio di inclusione-esclusione. La costruzione assiomatica di  $\mathbb{R}$ : da  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{Z}$  e da  $\mathbb{Z}$  a  $\mathbb{Q}$ ; da  $\mathbb{Q}$  ad  $\mathbb{R}$  attraverso le sezioni di Dedekind.
- ▶ **STARTING TOOLKIT:** prodotti notevoli, numero di permutazioni e disposizioni, coefficienti binomiali, binomio di Newton, concetto di polinomio, divisione tra polinomi e Teorema di Ruffini. Serie geometrica e serie armonica (somme parziali), periodo dell'espressione decimale, cambi di base. Algoritmi di sorting. Teorema di Pick. Equazioni, disequazioni e sistemi di primo e secondo grado. Utili funzioni di supporto: valore assoluto, radice quadrata,  $a^b$ . Disuguaglianza triangolare.

# Il nostro canovaccio II

- ▶ **ARITMETICA:** definizione di gruppo e teoremi inerenti, aritmetica modulare e teoremi inerenti.
- ▶ **ANALISI:** la costruzione di  $\mathbb{C}$ , spazi metrici ( $\mathbb{R}$  come completamento di  $\mathbb{Q}$ ), elementi di topologia. Il concetto di continuità dal punto di vista topologico e metrico. Successioni, limiti. Spazi metrici e completamento. La funzione esponenziale. Derivate, operatori differenziali. Lipschitzianità e teoremi di punto fisso.
- ▶ **ALGEBRA:** L'algebra dei polinomi, relazioni tra coefficienti e radici. Successioni per ricorrenza lineari. Polinomi di Chebyshev e risoluzione di equazioni di terzo grado.
- ▶ **ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE:** Gauss-Jordan, Cramer, Vandermonde. Spazi vettoriali e applicazioni lineari, determinante, rango. Cayley-Hamilton, forma di Jordan-Schur. Prodotti scalari, Teorema spettrale.

# Il nostro canovaccio III

- ▶ **INTRODUZIONE ALLA PROBABILITÀ:** variabili aleatorie discrete e catene di Markov finite. Problemi “della pulce” e della “rovina del giocatore”. Disuguaglianza di Markov, disuguaglianza di Chebyshev.
- ▶ **ALGEBRA:** disuguaglianze. Karamata, Medie, Holder, Minkowski, riarrangiamento.
- ▶ **GEOMETRIA SINTETICA:** criteri di congruenza dei triangoli - angoli e misure, concetto di area (misura di Peano-Jordan) per porzioni di  $\mathbb{R}^2$  delimitate da curve  $C^1$  a tratti - trasformazioni del piano: il Teorema di Binet come conseguenza del fatto che le affinità conservano i rapporti tra aree/volumi - punti notevoli e relazioni metriche - trigonometria - circonferenze e quadrilateri - luoghi geometrici - problemi di minimo - disuguaglianze geometriche: Eulero, Mordell, isoperimetrica (via triangolazioni di Steiner) - coniche - inversione circolare e coordinate trilineari - geometria proiettiva e principio di dualità.

# Il nostro canovaccio IV

- ▶ **ANALISI:** notazione di Landau-Vinogradov. Studi di funzione, grafici, convessità, serie, integrale di Riemann, polinomio di Taylor con resto integrale. Rolle, Cauchy, Lagrange, Bernoulli (De l'Hôpital). Disuguaglianza di Stirling elementare. Equazioni differenziali ordinarie e Teorema di Cauchy-Lipschitz.
- ▶ **GEOMETRIA ANALITICA:** coniche, cubiche - curve e spazio tangente, Teorema di Bézout.
- ▶ **ANALISI:** accenni di analisi complessa: serie di potenze, teorema di Lucas, formula di Cauchy, principio del massimo, disuguaglianza di Rouché e Teoremi di Gershgorin, Teorema fondamentale dell'algebra.
- ▶ **COMBINATORIA ANALITICA:** somme di binomiali, DFT. Alberi e grafi. Dimostrazione del Teorema di Erdos-Ko-Rado sul numero cromatico dei grafi di Kneser.
- ▶ **ANALISI:** accenni di analisi in due variabili. Jacobiano, teorema di invertibilità locale. Moltiplicatori di Lagrange. Disuguaglianza isoperimetrica, un altro approccio.

# Il nostro canovaccio V

- ▶ ANALISI: accenni di teoria della misura (costruzione di Caratheodory), serie di Fourier e spazi  $L^p$ . Teoremi di densità relativi a polinomi, funzioni continue, funzioni  $C^\infty$ , funzioni analitiche.
- ▶ TDN: teoria dei numeri elementare. Campi finiti, reciprocità quadratica, frazioni continue, equazioni di Pell, forme quadratiche. Cauchy-Davenport, Erdos-Ginzburg-Ziv e Alon-Furedi. Questioni di supporto agli algoritmi crittografici. Funzioni moltiplicative, algebra delle serie di Dirichlet. PNT e teorema di Dirichlet.
- ▶ ANALISI: funzioni speciali. Funzione Gamma, Beta, Zeta. Prodotto di Weierstrass.

# Il nostro canovaccio VI

- ▶ ADDENDUM: cubiche ellittiche (su  $\mathbb{C}$  e su campi finiti) e funzioni modulari ellittiche ( $\wp$  di Weierstrass,  $\Theta$  di Jacobi. Prodotto triplo e quintuplo ed alcune tra le sterminate conseguenze); elementi di Teoria di Galois: equazioni risolubili per radicali, problemi di costruzione con riga e compasso e problemi di costruzione di un triangolo dati tre punti notevoli; applicazioni alla fisica.

Ed ora, una breve anteprima del progetto.

# Cosa desideriamo

Cerchiamo collaboratori per accelerare la realizzazione di questo corposo progetto, e persone interessate a muoverci critiche costruttive.

A realizzazione ultimata, ci piacerebbe avvalerci del supporto di una casa editrice per dare effettiva consistenza cartacea al progetto.

# Contatti

Docente coordinatore, Dipartimento di Matematica di Pisa:

*Franco Favilli*, [favilli@dm.unipi.it](mailto:favilli@dm.unipi.it)

Responsabile del progetto, Dipartimento di Matematica di Pisa:

*Jacopo D'Aurizio*, [daurizio@mail.dm.unipi.it](mailto:daurizio@mail.dm.unipi.it)

Viceresponsabile del progetto, Dipartimento di Matematica di Pisa:

*Rosario Mennuni*, [mennuni@mail.dm.unipi.it](mailto:mennuni@mail.dm.unipi.it)

Mailing list del progetto:

[matematicaelementare@poisson.phc.unipi.it](mailto:matematicaelementare@poisson.phc.unipi.it)

Wiki del progetto:

<http://poisson.phc.unipi.it/~trainini/matematicaelementare>

Anteprima del progetto:

<http://poisson.phc.unipi.it/~daurizio/Chap4.pdf>