Maria Giuditta Campedelli

Divagazioni intorno a figure elementari

Le pagine qui trascritte sono uno schema della conversazione; vi sono riprodotti sinteticamente i lucidi che l' hanno accompagnata, e mancano dunque collegamenti e chiarimenti del resto abbastanza facilmente intuibili.

Triangoli

Esiste l' insieme, T_a, di triangoli con i lati in progressione aritmetica?

studio delle condizioni di esistenza

- dati: $a > 0$, $d \neq 0$, le lunghezze dei lati del generico elemento $\in T_a$ sono: a, $a + d$, $a + 2d$;

deve valere la disuguaglianza triangolare:

$$a < (a+d) + (a+2d)$$
$$a+d < a + (a+2d)$$
$$a+2d < a + (a+d),$$

da cui: $d > - a/3$, $d > - a$, $d < a$, e quindi: $-a/3 < d < 0$ e $0 < d < a$.

→ ***T_a* esiste**, *e i suoi elementi sono triangoli con i lati in progressione aritmetica avente la ragione che soddisfa le disuguaglianze precedenti.*

***Studiamo T_a**: esistono in esso sottoinsiemi, T_{ar}, di triangoli rettangoli?*

* intervallo $-a/3 < d < 0$ (*progr. aritm. decr.*)

ipotenusa: a, cateto maggiore: $a + d$, cateto minore: $a + 2d$

teorema di Pitagora: $a^2 = (a+d)^2 + (a+2d)^2$, da cui: $d = \begin{cases} -a/5 & [\in -a/3 < d < 0] \\ -a & [\text{n.v.}] \end{cases}$

→i triangoli i cui lati sono del tipo: a, $4a/5$, $3a/5$ costituiscono $T_{adr} \subset T_{ar}$

entra in gioco la terna pitagorica 3, 4, 5.

* intervallo $0 < d < a$ (*prog. aritm. cres.*)

ipotenusa: $a + 2d$, cateto maggiore: $a + d$, cateto minore: a

teorema di Pitagora: $(a+2d)^2 = (a+d)^2 + a^2$, da cui: $d = \begin{cases} a/3 & [\in 0 < d < a] \\ -a & [\text{n.v.}] \end{cases}$

→i triangoli i cui lati sono del tipo: a, $4a/3$, $5a/3$ costituiscono $T_{acr} \subset T_{ar}$

entra in gioco la terna pitagorica 3, 4, 5.

Risulta: $T_{adr} \cup T_{acr} = T_{ar} \subset T_a$.

Poiché in ogni triangolo $\in T_{ar}$ è presente la terna pitagorica 3, 4, 5, tutti i triangoli rettangoli $\in T_a$ sono *simili.*

Osservazione - Per ogni a esiste una coppia di elementi $\in T_{ar}$ con un lato uguale (fig.1).

Esiste l' insieme, T_g, di triangoli con i lati in progressione geometrica?

studio delle condizioni di esistenza

- dati: $a > 0$, $q \neq 0$, $q \neq 1$, le lunghezze dei lati del generico elemento $\in T_g$ sono: a, $a q$, $a q^2$;

deve valere la disuguaglianza triangolare:

$$\begin{array}{lcl} a < aq + aq^2 & & q^2 + q - 1 > 0 \\ aq < a + aq^2 & \text{ossia:} & q^2 - q + 1 > 0 \\ aq^2 < a + aq & & q^2 - q - 1 < 0 \, ; \end{array}$$

risolvendo le equazioni associate si ha rispettivamente:

$$q = (-1 \pm \sqrt{5})/2 = \begin{cases} 1/\tau = \tau - 1 \\ -\tau \end{cases}$$

$\Delta < 0$

$$q = (1 \pm \sqrt{5})/2 = \begin{cases} \tau \\ 1-\tau \end{cases}$$

il sistema è soddisfatto per:

$\tau - 1 < q < 1$ e $1 < q < \tau$

→ ***T_g esiste****, e i suoi elementi sono triangoli con i lati in progressione geometrica avente la ragione che soddisfa le disuguaglianze precedenti.*

Poiché q non è funzione di a, poniamo a =1

Allora: $T_g\,[1,q,q^2;\, q,q^2,q^3;\, ...\, ;\, q^k,q^{k+1},q^{k+2};\, \ldots]$, (k = 0, 1, 2, …)

- per ogni opportuno q si ha un sottoinsieme, $T_g^* \subset T_g$:
- i suoi infiniti elementi sono triangoli ***simili***
- il rapporto di similitudine è 1/q
- i triangoli, essendo simili, hanno gli angoli a due a due uguali
- due triangoli successivi hanno *cinque* elementi uguali (due lati e tre angoli)

Poligonali (figg.2, 3)

Si ottengono infinite *poligonali aperte* disegnando i triangoli di ogni T_g nel modo seguente:

- i lati disposti in senso orario
  → primo lato, AO = 1, del primo triangolo, AOB
- il secondo lato di un triangolo e il primo del triangolo immediatamente successivo sono sovrapposti
  →il vertice O (compreso fra il primo e il secondo lato) è comune a tutti i triangoli

Quindi le poligonali così costruite sono caratterizzate da:

- polo in O
- primo lato OA = 1
- proseguono indefinitamente in senso antiorario intorno ad O
- l'angolo, α, con vertice nel polo è il medesimo per ogni triangolo (*poligonali equiangolari*)
- i raggi vettori (ossia i segmenti che vanno dal polo agli altri vertici dei triangoli) sono nella progressione geometrica data

* fig.2: intervallo $\tau - 1 < q < 1$ → *progr. geom. decrescente*

OA = 1; q = ¾; $\alpha \cong 34° = 17\pi/90$

poligonale aperta che prosegue indefinitamente in senso antiorario intorno ad O *avvicinandosi*

* fig.3: intervallo $1 < q < \tau$ → *progr. geom. crescente*

OA = 1; q = 3/2; $\alpha \cong 127° = 127\pi/180$

poligonale aperta che prosegue indefinitamente in senso antiorario intorno ad O *allontanandosi*

Spirali

spirale: curva piana che si ripete indefinitamente compiendo giri intorno ad un punto (O, polo) secondo una legge assegnata; ha origine in un punto, A, che *può* anche coincidere con O.

le **Spirali** del Torricelli (fig.4)

definizione [dal " De spiralibus infinitis" di *Evangelista Torricelli* (1608 – 1647)]:" Il punto mobile … nelle nostre spirali … percorre in tempi uguali spazi in progressione geometrica; quindi piacque chiamare geometriche queste spirali"

Giacomo Bernoulli (1654-1705)i "eadem mutata resurgo"; infatti l'evoluta (luogo dei centri di curvatura) e la podaria (luogo dei piedi delle perpendicolari condotte dal polo) di una spirale del Torricelli sono ancora curve di quel tipo.

equazione

in un riferimento polare antiorario di polo O e asse polare, *a*, si scelgono:

- l'origine, A, della spirale sopra la *a*, $\neq$ O, e t.c. d (OA) = 1[u]
- q ragione della progressione geometrica
- α, angolo costante spazzato dal raggio vettore nel tempo t
- gli estremi degli archi opposti ai successivi angoli α hanno raggi vettori, ρ, nella progressione data

Il generico punto, P, che descrive la spirale ha coordinate:

$$\rho = q^t$$
$$\theta = t\alpha$$

al variare di t con continuità (ossia eliminando il parametro t) : (*) $\rho = q^{\theta/\alpha}$;
poiché: $q^{\theta/\alpha} = e^{(\theta/\alpha)\log q}$, avendo posto $(1/\alpha)\log q = h$, la (*) diviene: $\rho = e^{h\theta}$
da cui il nome di "*spirale logaritmica*".

I vertici delle nostre poligonali sono situati su spirali del Torricelli.

Infatti,fissato un riferimento polare con il polo in O e per asse la semiretta su cui giace il primo lato, OA, delle poligonali considerate, i loro vertici, P_n (n = 0, 1, 2, …; $A \equiv P_0$), hanno coordinate:

$$\rho = q^n$$
$$\theta = n\alpha$$

e dunque al variare di n con continuità le poligonali divengono *spirali del Torricelli* (figg.5 e 6).

Studiamo T_g:esistono in esso <u>sottoinsiemi, T_{gr}, di triangoli rettangoli</u>?

* intervallo $\tau - 1 < q < 1$ (*prog. geom. decr.*)
ipotenusa: 1, cateto maggiore: q , cateto minore: q^2
teorema di Pitagora: $1 = q^2 + q^4$

$$q^2 = \frac{\tau - 1}{\tau} \rightarrow q = \frac{(\tau - 1)^{1/2}}{\tau^{1/2}} \quad [\in \tau - 1 < q < 1] \text{ [n.v.]}$$

$T_{gdr}[1,(\tau-1)^{1/2}, (\tau-1); (\tau-1)^{1/2}, (\tau-1), (\tau-1)^{3/2}; ...]$
entra in gioco la terna pitagorica: $1,(\tau-1)^{1/2}, (\tau-1)$

* intervallo $1 < q < \tau$ (*prog. geom. cres.*)
ipotenusa: q^2, cateto maggiore: q, cateto minore: 1
teorema di Pitagora: $q^4 = q^2 + 1$

$$q^2 = \frac{\tau}{1-\tau} \rightarrow q = \frac{\tau^{1/2}}{(1-\tau)^{1/2}} \quad [\in 1 < q < \tau] \text{ [n.v.]}$$

T_{gcr} $[1, \tau^{1/2},\tau; \tau^{1/2},\tau, \tau^{3/2}; ...]$
entra in gioco la terna pitagorica: $1, \tau^{1/2},\tau$;
ma $\tau - 1 = 1/\tau$, perciò moltiplicando gli elementi della terna $1,(\tau-1)^{1/2}, (\tau-1)$ per τ se ne ottiene $\tau, \tau^{1/2}, 1$; quindi la terna pitagorica che interviene in T_{grd} e T_{grc} è sempre la stessa
Risulta: $T_{grd} \cup T_{gcr} = T_{gr} \subset T_g$
* tutti gli elementi di T_{gr} sono triangoli simili e **aurei**
* con gli elementi di T_{grd} *e* T_{grc} si costruiscono **poligonali "auree"** e, di conseguenza, **spirali "auree" del Torricelli** passanti per i loro vertici
fig.7: $q = (\tau-1)^{1/2}$; $\alpha = \text{arcsen}(\tau-1) \cong 38° = 19\pi/90$; $\rho = (\tau-1)^{45\theta/19\pi}$.
fig.8: $q = \tau^{1/2}$; $\alpha = 90° = \pi/2$; $\rho = \tau^{\theta/\pi}$,

Un'interpretazione geometrica del rapporto τ/π

"*τ/π è uguale al rapporto fra l'area, A_P, della superficie di un parallelepipedo aureo e l'area, A_S, della sfera, ad esso circoscritta*"

I lati della base del parallelepipedo aureo misurano τ e $\tau+1$ [u], la sua altezza è 1 [u]; allora:
$A_P / A_S = 4\tau^3 / 4\pi\tau^2 = \tau/\pi$.

Quadrilateri

Parallelogrammi generati da quadrilateri in base a leggi particolari

teorema 1: "dato un qualsiasi quadrilatero (*convesso* o *concavo)*, le parallele a ciascuna delle sue diagonali tracciate per i vertici dell'altra individuano un parallelogrammo (*esterno)*"

quadrilatero convesso

quadrilatero concavo non intrecciato

quadrilatero concavo intrecciato

corollario1.1 – "il perimetro del parallelogrammo esterno, MNPQ, è il doppio della somma delle misure delle diagonali del quadrilatero dato, ABCD"

corollario 2.1: "l'area della superficie di MNPQ è il doppio di quella di ABCD"

$$A_{\mathrm{MNPQ}} = A_{\mathrm{MNCA}} + A_{\mathrm{ACPQ}} = 2A_{\mathrm{ABC}} + 2A_{\mathrm{ACD}} = 2A_{\mathrm{ABCD}}$$

$$A_{\mathrm{MNPQ}} = A_{\mathrm{MNBD}} + A_{\mathrm{DBPQ}} = 2A_{\mathrm{ABD}} + 2A_{\mathrm{BCD}} = 2A_{\mathrm{ABCD}}$$

- seguendo la legge di cui al teor.1, disegniamo il parallelogrammo esterno ad MNPQ, poi ancora quello esterno, ecc…; si ottiene l' insieme, ***Q***, *ordinato,* dei parallelogrammi esterni

- avendo posto

$$A_{\mathrm{ABCD}} = 1$$

le aree delle superficie degli elementi di **Q** costituiscono la *progressione geometrica crescente* di ragione "2"e primo elemento 2; la somma di tali aree è espressa dalla *serie divergente*:

$$2 + 2^2 + 2^3 + \ \dots + 2^n + \ \dots$$

<u>teorema 2</u> [di P. Varignon (1654 – 1722); pubblicato postumo, nel 1731]: “il poligono che si ottiene congiungendo i punti medi dei lati di un qualsiasi quadrilatero è un parallelogrammo (*mediano)*”

triang. ABC: MN = 1/2 AC; MN parall. AC

triang. ACD: QP = 1/2 AC; QP parall. AC

→ MN parall. e = AC, → *MNPQ parallel. mediano*

caso del quadrilatero concavo intrecciato

<u>corollario 1.2</u> – “il perimetro del parallelogrammo mediano è uguale alla somma delle lunghezze delle diagonali del quadrilatero generatore”

<u>corollario 2.2</u> – “l’area della superficie del parallelogrammo mediano è la metà di quella del quadrilatero generatore”

caso del quadrilatero generatore convesso

A(MNPQ) = A(ABCD) - [A(MBN) + A(NCP) + A(PDQ) + A(QAM)] = A(ABCD) – [A(ABC)/4 + A(BCD)/4 + A(CDA)/4 + A(DAB)/4] = A(ABCD) – 2A(ABCD)/4 = A(ABCD)/2

- seguendo la legge del Varignon disegniamo il parallelogrammo mediano di MNPQ, poi ancora quello mediano, ecc…; si ottiene

l’ insieme, ***Q****, *ordinato,* dei parallelogrammi mediani

- avendo posto

$$A_{\mathrm{ABCD}} = 1$$

le aree delle superficie degli elementi di **Q*** costituiscono la *progressione geometrica decrescente* di ragione “1/2”e primo elemento 1/2; la somma di tali aree è espressa dalla *serie convergente* ad **1**:

$$1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3 + \ \dots + (1/2)^n + \ \dots$$

teorema 3: “dato un quadrilatero ABCD (concavo o convesso), il parallelogrammo MNPQ esterno e quello $M_VN_VP_VQ_V$ mediano sono simili”

→ ponendo in corrispondenza biunivoca gli elementi degli insiemi ordinati Q e Q* si ottengono coppie di parallelogrammi simili

Quadrilateri generatori, ABCD, particolari

* se le diagonali di ABCD sono uguali (trapezio isoscele, rettangolo, quadrato) i parallelogrammi esterno e mediano sono rombi

* se le diagonali di ABCD sono perpendicolari (rombo, aquilone, deltoide) i parallelogrammi esterno e mediano sono rettangoli

in particolare:

- ABCD rettangolo
- ABCD rombo
- ABCD quadrato

Bibliografia

- M.G.Campedelli “Proposte per un lavoro in classe: geometria e successioni numeriche” in Progetto Alice, 2000 III – vol.I – n.3
- M.G.Campedelli “Una ricerca didattica di geometria e altre proposte” in Nuova Secondaria , anno XVIII, nn.2, 3 – ed. La Scuola, Brescia 2000