

Risoluzione di problemi e sviluppo del pensiero matematico

Il Rally Matematico Transalpino e la sua valenza didattica

C.Crociani – L.Doretti – L.Salomone

"...una matematica statica e staticamente riprodotta non potrà mai esaurire la formazione necessaria ad un giovane che non voglia essere spettatore passivo della nostra società"

(Pellerey, 1983)

La risoluzione di problemi è centrale nell'educazione matematica.

Essa richiede di:

- ❖ *sviluppare strategie*
- ❖ *immaginare un percorso risolutivo*
- ❖ *prendere decisioni*

Non basta ciò che si sa già fare: occorre utilizzare le proprie capacità in qualcosa di nuovo, che può anche contrastare con il sapere posseduto

Come è noto sul processo risolutivo influiscono:

- *Fattori cognitivi*
- *Fattori metacognitivi (consapevolezza e gestione delle proprie risorse)*
- *Fattori affettivi (emozioni, atteggiamenti e convinzioni)*

Le *gare matematiche* possono essere occasioni favorevoli per coinvolgere gli allievi e impegnarli in un'attività significativa di risoluzione di problemi

IL RALLY MATEMATICO

TRANSALPINO



**Gara di matematica per *classi*
basata sulla *risoluzione di problemi***

Gara *internazionale*

Ogni anno il RMT si articola in tre
“tappe” ufficiali:

- ❖ *Prima prova*
- ❖ *Seconda prova*
- ❖ *Finale*

Precedute da una o più *prove di allenamento*

Svolgimento di ogni singola prova

- Ciascuna classe deve risolvere da *cinque a sette problemi*
- Gli allievi, *divisi in gruppi*, lavorano in *assoluta autonomia*, senza alcun aiuto da parte dell'insegnante
- Per ciascun problema deve essere prodotta un'unica soluzione, che è la *soluzione della classe*
- Il tempo a disposizione è di *50 minuti*

Gli aspetti che rendono il RMT interessante per insegnanti ed allievi sono:

- *la tipologia dei problemi*
- *la metodologia utilizzata basata sul lavoro in gruppo*

Cosa hanno di particolare i problemi del RMT?

- **il linguaggio** *chiaro e adeguato allo sviluppo cognitivo degli allievi*
- **il contesto**
- **le situazioni proposte** *che stimolano a fare tentativi, operare congetture, a provare strategie nuove e forme di rappresentazione non precostituite*

In altre parole.....

I problemi del RMT sono "veri problemi"

L'allievo è posto in una situazione "simile" a quella del matematico che ha di fronte a sé un nuovo problema per il quale non dispone di nessuna procedura immediata

Nei problemi del RMT, inoltre,
non basta dare la risposta giusta, ma
occorre anche ***ben giustificarla***



gli allievi sono indotti a ripercorrere le
tappe del ragionamento che li ha
portati alla
soluzione
(*piano metacognitivo*)

Agli occhi dei ragazzi i problemi del RMT si presentano

"diversi da quelli di sempre"

[Francesco, 3[^]elem.]

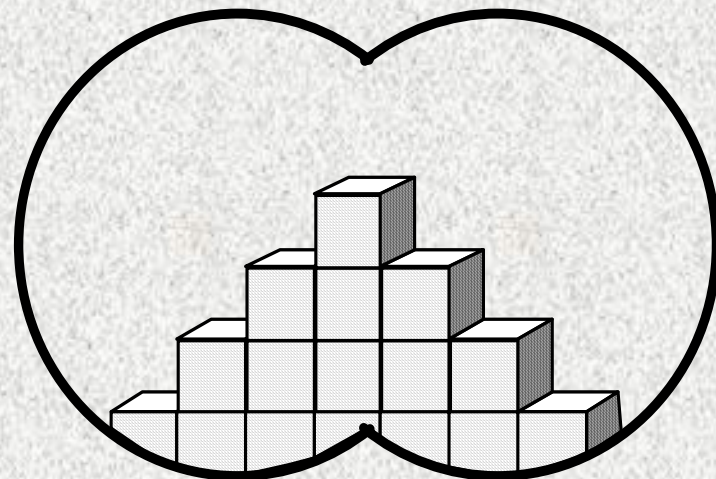
"non noiosi" e "in grado di dare la giusta carica" [Maria Caterina, 2[^]media]

DOPPIA SCALA (Cat. 4, 5, 6)

Sofia ha costruito una doppia scala regolare di 1 metro di altezza con cubetti di 5 cm di lato.

Il suo amico Andrea, dalla finestra del palazzo di fronte, osserva la costruzione con il binocolo.

Disegna ciò che vede:



Quanti cubetti ha utilizzato in tutto Sofia per costruire la sua doppia scala?

Spiegate la vostra soluzione.

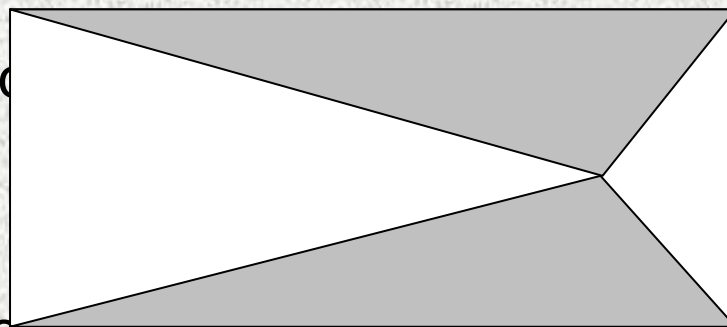
Si tratta del problema 7 della Prova I del 10° RMT (anno 2002)

L'EREDITA' (Cat. 7, 8)

Due fratelli ereditano un terreno di forma rettangolare. Per dividerlo in due parti della medesima estensione, un conoscente suggerisce loro di piantare un

palo in un punto qualsiasi del terreno e congiungerlo ai quattro paletti infissi nei quattro vertici del terreno rettangolare.

Uno dei fratelli prenderà la parte colorata in grigio nel disegno, l'altro la rimanente.



**Le due parti sono davvero uguali?
Giustificate il vostro ragionamento.**

Caratteristiche della *metodologia di lavoro*:

❖ *lavoro in gruppo* →

gli allievi sono costretti a *discutere, sostenere le proprie affermazioni, confrontarsi, accettare o rifiutare le posizioni degli altri, accordarsi sulla soluzione da dare*

❖ *autonomia* →

gli allievi devono *organizzarsi, gestire il tempo, dividersi il lavoro*

I ragazzi e il lavoro in gruppo

- *“A me piace il Rally matematico perché secondo me è bello lavorare in gruppo e provare tante soluzioni, sapere i pareri di tutti i componenti del gruppo e aiutarsi a vicenda. In questo modo ci si esercita con la matematica e soprattutto si impara ad aiutarsi. A me piacciono i problemi del Rally perché non sono i soliti problemi da risolvere con le operazioni, ma in quelli bisogna usare la logica e si possono trovare tante soluzioni differenti. Lavorando in gruppo si riesce a confrontare le proprie idee con quelle degli altri e in questo modo si riescono a risolvere i problemi fra bambini, senza l'aiuto dell'insegnante”. [Andrea, 1 ^ Media]*

- *"Il Rally mi è servito per imparare a ragionare ma anche per stare insieme ai miei compagni, è stata un'esperienza bellissima.*

Spero anche il prossimo anno di fare il Rally perché mi è piaciuto mettere alla prova le mie capacità e ho anche riacquistata la sicurezza che avevo persa".

[Camilla, 5[^] Elementare]

Il RMT non è solo la gara!!

Essa è preceduta e seguita da altri momenti e attività didatticamente rilevanti.

- ✓ *analisi a priori*
- ✓ *analisi a posteriori*

Analisi a priori

La messa a punto di un problema segue un iter lungo e articolato.

Essa è accompagnata da un lavoro di ipotesi finalizzato alla previsione di:

- ✓ *percorsi, strategie, soluzioni*
- ✓ *difficoltà ed errori*
- ✓ *variabili didattiche in gioco*

Tutto ciò viene sintetizzato in una scheda allegata al problema

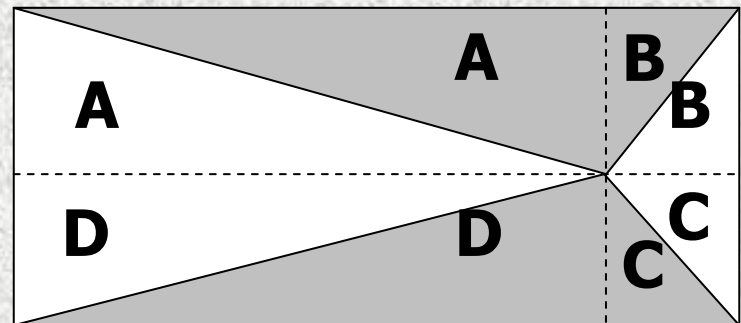
Analisi a priori

Ambito concettuale

- Geometria piana: triangoli e loro misura

Analisi del compito

- Capire che comunque si scelga il punto dove mettere il palo sul terreno rettangolare, se si conducono le parallele ai lati la parte grigia e quella bianca sono entrambe composte dagli stessi quattro triangoli A, B, C, D.



- Oppure capire che comunque si scelga il punto dove mettere il palo sul terreno rettangolare, si individuano quattro triangoli aventi a due a due come base una delle due dimensioni del rettangolo e come somma delle altezze, l'altra dimensione, per cui anche se il punto dove si mette il palo cambia, la somma delle aree (di due triangoli aventi basi uguali) non cambia.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta con procedimento dimostrativo (del tipo indicato nell'analisi del compito)
- 3 Risposta corretta e con spiegazione insufficiente (nessuna indicazione sulle rette che dividono il rettangolo, benchè presenti nel disegno della risposta; nessuna indicazione sulla scomposizione delle parti bianche e grigie A, B, C, D; nessuna giustificazione sull'uguaglianza dei triangolini....)

- 2 Risposta corretta con ricorso a più di un esempio (il palo al centro o altro) con giustificazione sperimentale (misure e calcoli coerenti)
- 1 Risposta coerente con ricorso alla misura (corretta o meno se le misure non sono molto precise) oppure risposta corretta alla domanda senza spiegazione coerente
- 0 Spiegazione completamente errata o incomprensione del problema

Livello: 7-8

Origine: Parma

Analisi a posteriori

Un attento esame degli elaborati degli allievi permette di:

- ✓ *evidenziare conoscenze utilizzate e difficoltà incontrate*
- ✓ *confrontare procedure e rappresentazioni*
- ✓ *analizzare errori commessi*

L'analisi a posteriori può essere condotta a più livelli: dal singolo insegnante, tra insegnanti della stessa scuola, tra insegnanti e ricercatori

Esempio di analisi a posteriori sul problema "*L'eredità*"

L'esame di circa 90 elaborati ha messo in evidenza le seguenti strategie:

- 1. uso delle misure** fatte direttamente sulla figura data nel testo (*ciò ha spesso portato alla risposta errata*)

Misurando il disegno abbiamo ottenuto le misure per svolgere il problema.

SVOLGIMENTO

$$\text{cm } 4,3 \cdot 6,4 = 27,52 \rightarrow \text{A TOTALE TERRENO}$$

$$\text{cm } 27,52 : 2 = 13,76 \rightarrow \text{ESATTA METÀ DEL TERRENO}$$

$$\text{cm } \frac{2,6 \cdot 6,4}{2} = 8,32 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{AREA T1}$$

$$\text{cm } \frac{1,4 \cdot 6,4}{2} = 5,44 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{AREA T4}$$

$$\text{cm}^2 5,44 + 8,32 = 13,76 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{AREA T1} + \text{AREA T4}$$

Grazie ad i calcoli sopra effettuati siamo riusciti a dimostrare che le 2 parti dei fratelli sono esattamente uguali.

LE PARTI NON SONO UGUALI PERCHÉ LA
PARTE BIANCA È DI AREA 13,32, MENTRE
QUELLA NERA È DI 13,23. IL NOSTRO RAGIONA-
MENTO ERA QUELLO DI TROVARE L'AREA DI
OGNI TRIANGOLO E ADDIZIONARE LE DUE
AREE DEI TRIANGOLI BIANCHI E ADDIZIONARE
LE AREE DI QUELLI NERI.

2. Uso di esempi particolari diversi
con giustificazione basata sulle misure

3. Scomposizione del rettangolo in
quattro parti (triangoli) e
ricomposizione delle stesse in due
quadrilateri da confrontare

RAGIONAMENTO A TENTATIVI

Abbiamo ~~dato~~ attribuito alcuni valori ai lati del
trapezio rettangolare.

$$l_1 = 5 \text{ cm}$$

$$l_2 = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Palo} \Rightarrow C(3; 2)$$

Calcoliamo la somma delle aree dei triangoli.

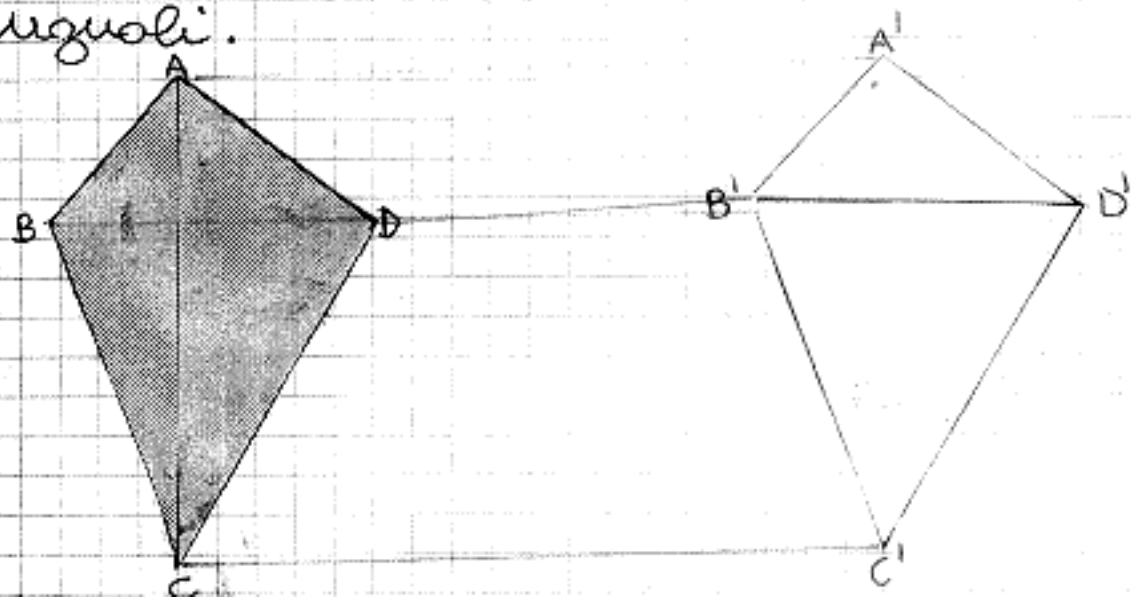
$$\text{Ter. grigio} = \left(\frac{10 \cdot 3}{2} \right) + \left(\frac{10 \cdot 2}{2} \right) = 25 \text{ cm}^2$$

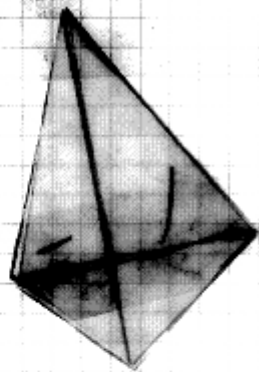
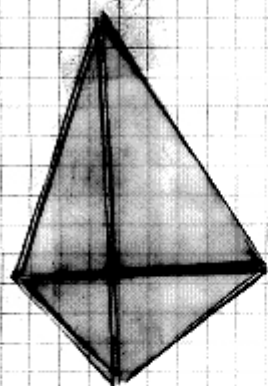
$$\text{ter. bianco} = \left(\frac{5 \cdot 2}{2} \right) + \left(\frac{5 \cdot 8}{2} \right) = 25 \text{ cm}^2$$

Le due parti di terreno coincidono

Risoluzione

Ho sovrapposto le due figure con una traslazione e sono arrivato alla conclusione che le due parti del terreno sono uguali.

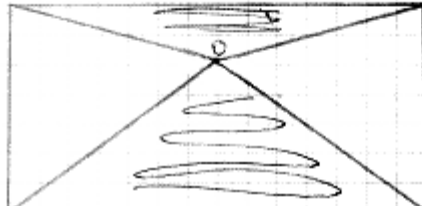
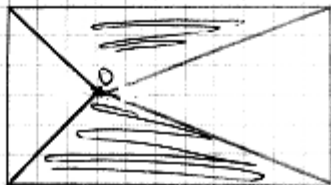




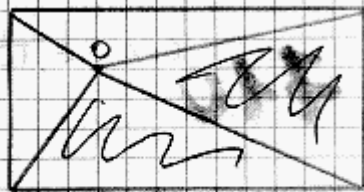
ALZARE

In un rettangolo se piantiamo un palo in qualsiasi punto e se congiungiamo questo ai quattro paletti inferiori, nei quattro vertici e prendiamo due triangoli con lo stesso vertice "O" in comune troviamo due parti uguali formate da due triangoli es:

blu =
branco

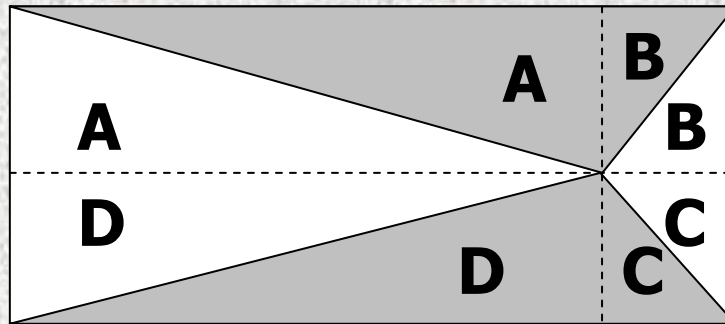


blu =
branco



infatti blu $\neq$ bianco

4. Disegno delle parallele ai lati e considerazioni sull'uguaglianza dei triangoli ottenuti



5. Comprensione del fatto che dovunque si piazzì il paletto si ottengono quattro triangoli aventi due a due come base una delle dimensioni del rettangolo e come altezza l'altra dimensione e
giustificazione

Esempio:

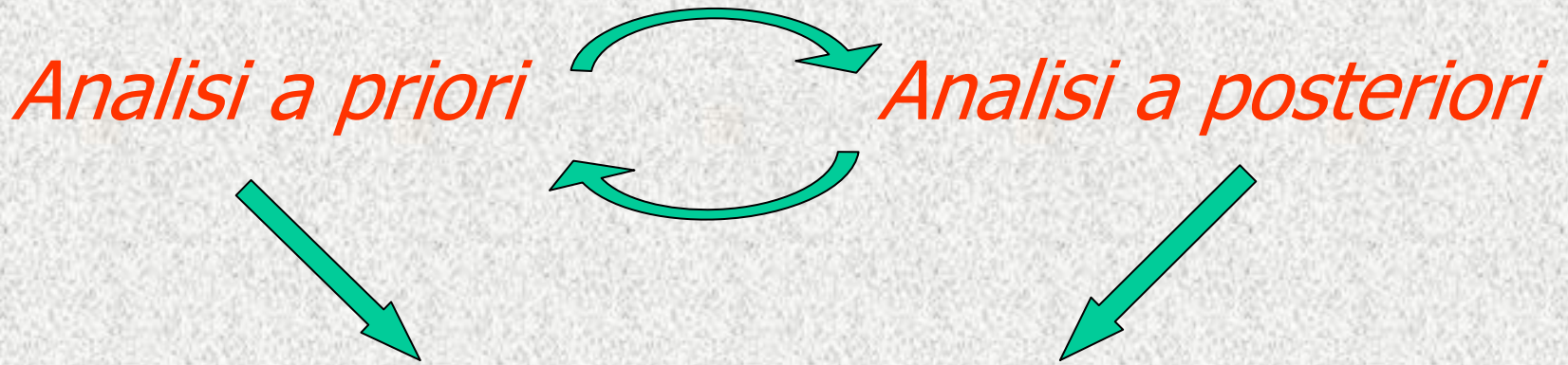
“ Le due parti sono uguali; infatti se noi indichiamo con a la base e con b l'altezza del rettangolo e con c, e, f, d le altezze dei triangoli, otteniamo:

$$ad/2 + ac/2 = A(\text{parte grigia});$$

$$be/2 + bf/2 = A(\text{parte bianca})$$

$$A(\text{parte grigia}) = a(d+c) = ab$$

$$A(\text{parte bianca}) = b(e+f) = ba \text{ “}$$



- *Utilizzazione in classe dei problemi del RMT*
- *azioni didattiche mirate*

Utilizzazioni in classe dei problemi del RMT

- riflessione e discussione su:
 - *saperi matematici coinvolti*
 - *errori commessi*
 - *strategie adottate*
 - *rappresentazioni utilizzate*
- costruzione o rafforzamento di concetti

Esempio di possibili utilizzazioni

Ancora il problema "L'eredità"...

Per la varietà di strategie possibili esso si inserisce perfettamente in un percorso di **avvio alla dimostrazione**: da una giustificazione "empirica" ad una di tipo formale.

*Attraverso il confronto e la discussione gli allievi avranno la possibilità di **avvertire la necessità** di giustificazioni più generali, indipendenti da casi particolari concreti.*

IN SINTESI....

Il RMT propone **agli allievi:**

- *di fare matematica nel risolvere problemi*
- di apprendere le regole elementari del dibattito scientifico
- *di sviluppare le loro capacità di lavorare in gruppo*

Il RMT propone **agli insegnanti**:

- *di osservare gli allievi in attività di risoluzione di problemi*
- di valutare la produzione dei propri allievi e le loro capacità di organizzazione
- *di discutere le soluzioni e di utilizzarle ulteriormente in classe*
- di introdurre elementi innovativi nel proprio insegnamento
- *di partecipare alla correzione collettiva degli elaborati e alla riflessione su di essi confrontandosi con colleghi e ricercatori*

IN CONCLUSIONE.....

Il RMT è un'esperienza ricca di potenzialità sul piano

- *della pratica didattica*
- *della ricerca*
- *della formazione degli insegnanti*

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

Crociani C, Doretto L., Salomone L., 2004, “Quando risolvere problemi è una “sfida” per la classe: il Rally Matematico Transalpino”, *Progetto Alice*, Serie III, Vol. 5, n. 15, 595-612

Grugnetti L., Jaquet F. (Eds), 1999, “*Il Rally Matematico Transalpino. Quali apporti per la didattica?/ Le Rallye mathématique transalpin. Quels profits pour la didactique ?*”, Atti delle giornate di studio sul RMT, Brighe 1997-1998, Pitagora Editrice Bologna

Grugnetti L., Jaquet F., Crociani C., Doretto L., Salomone L., (Eds.), 2001, “*RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici / RMT: évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques*”, Atti delle giornate di studio sul RMT, Siena 1999, Neuchatel 2000, Pitagora Editrice Bologna

Grugnetti L., Jaquet F., Medici D., Rinaldi M.G., Polo M. (Eds), 2003, “*RMT: potenzialità per la classe e la formazione / RMT: potentialités pour la classe e pour la formation*”, Atti delle giornate di studio sul RMT , Parma 2001, Torre delle Stelle 2002, Pitagora Editrice Bologna

Grugnetti L., Jaquet F., Schmit J.P.(Eds), 2004, “*RMT e valutazione / RMT et évaluation*”, Atti delle giornate di studio sul RMT, Mondorf-les-Bains (Luxembourg) 2004, Pitagora Editrice Bologna.