Facoltà di Agraria
Università degli Studi di Firenze

CORSO DI SOSTEGNO DI MATEMATICA

a cura di

Marco Longinetti *Daniela Pagani*

Corsi di Laurea Triennale

proff. G. Bianchi, M. Longinetti, A. Venturi

a.a. 2009/2010

Contents

1 Equazioni di primo grado **9**

1.1 Identità,equazioni e principi di equivalenza 9

1.2 Forma normale dell' equazione di 1^o grado 12

1.3 Discussione dell' equazione di 1° grado 13

1.3.1 Premessa. 13

1.3.2 Modalità di discussione. 14

1.4 Risoluzione dell' equazione di 1^ogrado. 15

1.4.1 Esercizi di verifica. 16

2 Disequazioni di 1^ogrado **17**

2.1 Diseguaglianze e disequazioni 17

2.2 Proprietà delle diseguaglianze 19

2.3 Risoluzione delle disequazioni 19

2.4 Determinate, indeterminate ed impossibili 22

2.4.1 Esercizi di verifica. 23

3 Sistemi di disequazioni lineari **25**

3.1 Introduzione 25

3.2 Metodo dei segni 27

3.2.1 Esercizi di verifica. 30

4 Geometria analitica **31**

4.1 La retta 31

4.1.1 Equazione delle rette passanti per $P(x_1,y_1)$ 34

4.1.2 Equazione della retta passante per due punti 35

4.1.3 Intersezione di due rette 37

4.1.4 Parallelismo e perpendicolarità fra rette 38

4.1.5 Distanza fra due punti. 39

4.1.6 Distanza di un punto da una retta. 39

4.2 La parabola 39

4.2.1 Problemi sulla parabola 45

4.2.2 a) Ricerca dell' equazione della parabola soddisfacente a condizioni assegnate 45

4.2.3 Esercizi di verifica. 45

4.2.4 b) Intersezioni fra parabola e retta. Rette tangenti ad una parabola. 46

4.3 La circonferenza 46

4.3.1 Problemi sulla circonferenza 49

4.3.2 Esercizi di verifica. 53

4.4 L' iperbole equilatera. 54

5 Equazioni e disequazioni di 2° grado 59

5.1 Equazioni di 2° grado 59

5.1.1 Scomposizione di un trinomio di secondo grado in prodotto di fattori di primo grado. 63

5.2 Risoluzione grafica di disequazioni di 2° grado. 65

5.3 Sistemi di disequazioni. 73

5.4 Disequazioni razionali fratte. 75

5.4.1 Esercizi di verifica. 78

6 Equazioni e disequazioni irrazionali. 79

6.1 Equazioni irrazionali riconducibili ad equazioni di primo e secondo grado. 79

6.2 Continuazione. 81

6.3 Vari tipi di equazioni irrazionali. 81

6.4 Disequazioni irrazionali 84

6.4.1 a) Disequazioni irrazionali quadratiche 84

6.5 Disequazioni irrazionali con indice dispari. 89

6.5.1 Esercizi di verifica. 90

7 Funzioni, potenze. 91

7.1 Funzioni. 91

7.1.1 Funzioni matematiche e funzioni empiriche. 91

7.1.2 Insiemi numerici direttamente proporzionali. 92

7.1.3 Legge della proporzionalità diretta e sua rappresentazione cartesiana 95

7.1.4 Le scale termometriche. 97
7.1.5 Il titolo dei metalli preziosi. 101
7.2 Forme quadratiche. 102
7.3 Potenze. 104
7.3.1 Concetto di potenza. 104
7.3.2 Casi particolari. 104

8 Radici e funzione valore assoluto. 109
8.1 Radicali aritmetici. 109
8.2 Proprietà invariantiva dei radicali aritmetici. 110
8.3 Operazioni con i radicali 111
8.3.1 Prodotto di due o più radicali. 111
8.3.2 Quoziente di due radicali 112
8.3.3 Potenza con esponente intero non negativo di un radicale. 112
8.3.4 Successive estrazioni di radici. 113
8.3.5 Radicali simili. Somma algebrica di radicali. 113
8.3.6 Razionalizzazione del denominatore di una frazione. . . 114
8.4 Potenze con esponente razionale 115
8.4.1 Potenza con esponente razionale di un numero reale. . 115
8.4.2 Proprietà delle potenze con esponente razionale. 117
8.5 Valore assoluto 118
8.5.1 Definizione e proprietà. 118
8.5.2 Disequazioni con il valore assoluto. 118
8.5.3 Esercizi di riepilogo. 122

9 Polinomi. Equazioni. 123
9.1 Polinomi 123
9.1.1 Definizioni 123
9.1.2 Polinomi ordinati. 124
9.1.3 Divisione di due polinomi in una sola variabile. 125
9.1.4 Regola pratica per la divisione di polinomi. 125
9.1.5 Divisibilità di un polinomio per un binomio di primo grado. 129
9.1.6 Teorema di Ruffini. 129
9.1.7 Regola di Ruffini. 130
9.2 Scomposizione di un polinomio in fattori 132
9.2.1 Premessa. 132

9.2.2 Scomposizione di polinomi mediante il teorema e la regola di Ruffini. 133
9.2.3 Fattorizzazione di un polinomio. 135
9.2.4 Alcuni metodi di fattorizzazione. 136
9.2.5 Esercizi di riepilogo. 139

10 Richiami di trigonometria **141**
10.1 Definizioni 141
10.2 Funzioni seno e coseno 145
10.3 Principali proprietà di $senx$, $cosx$, tgx. 154
10.4 Trigonometria piana applicata ai triangoli 155
10.4.1 Teoremi sui triangoli rettangoli. 158
10.5 Interpretazione goniometrica del coefficiente angolare della retta. 161
10.6 Formulario 163
10.7 Esercizi proposti 165

11 Equazioni e disequazioni trigonometriche **167**
11.1 Equazioni goniometriche fondamentali 167
11.2 Tipi semplici di equazioni goniometriche 172
11.3 Disequazioni trigonometriche 177
11.3.1 - 1° tipo: $senx \gtrless a$ 177
11.3.2 Esercizi di verifica. 182
11.3.3 2° tipo: $cosx \gtrless a$ 182
11.3.4 Esercizi di verifica. 186
11.3.5 3° tipo. $tgx \gtrless a$ 187
11.3.6 Esercizi di verifica. 189

12 Funzioni esponenziale e logaritmo **191**
12.1 Funzione esponenziale 191
12.1.1 Introduzione. 191
12.1.2 Studio della funzione. 192
12.1.3 La curva $y = e^x$. 194
12.1.4 Equazioni esponenziali. 195
12.1.5 Disequazioni esponenziali. 199
12.2 I logaritmi 202
12.2.1 Conseguenze fondamentali. 202
12.2.2 Proprietà formali della funzione logaritmo. 202
12.2.3 La curva logaritmica. 204

12.2.4 La curva $y = \log x$ 205
12.2.5 Equazioni logaritmiche. 206
12.2.6 Disequazioni logaritmiche. 209
12.2.7 Esercizi di riepilogo 213

13 Autoverifica del Precorso **215**

Chapter 1

Equazioni di primo grado

1.1 Identità,equazioni e principi di equivalenza

Definizione Si dice *identità* una uguaglianza fra due espressioni letterali che è verificata per qualsiasi valore attribuito alla lettera o alle lettere che vi figurano.

Esempio Le seguenti uguaglianze sono identità:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$3(a^2b-b^3)=3b(a+b)(a-b)$$
$$(a-5)(a+5)-a^2=-25$$

Il procedimento corretto per dimostrare che una uguaglianza è una identità si ricava dal seguente

Esempio Verificare se l' uguaglianza

$$a^2b(a-3)+a=a\left[\left(a^2-3a\right)b+1\right]$$

è un' identità.

Per la risoluzione si individuano i tre passi successivi a), b),c):

a) $a^2b(a-3)+a=a^3b-3a^2b+a$

b) $a\left[\left(a^2-3a\right)b+1\right]=a\left[a^2b-3ab+1\right]=a^3b-3a^2b+a$

c) $a^3b-3a^2b+a=a^3b-3a^2b+a$

Definizione Si dice *equazione* una uguaglianza fra due espressioni che può essere verificata solo per particolari valori attribuiti alla lettera o alle lettere che in essa figurano e che si dicono *incognite.*

Esempio Le seguenti uguaglianze sono equazioni:

$5x + 3 = 13;$
$7x - 5 = 2x + 10$

Possiamo verificare che la prima ha soluzione $x = 2$ e la seconda $x = 3$.

Definizioni I termini, cioè i *monomi,* di un' equazione che non contengono l' incognita si dicono *termini noti.*Nelle due equazioni dell' esempio corrente vi è la sola incognita x che figura con l' esponente 1 sottinteso. In questa circostanza tali equazioni si dicono *di primo grado ad una incognita*; un' equazione di primo grado ad una incognita ammette in generale una sola soluzione. Un' equazione si dice *impossibile* quando non ammette soluzioni.

L' equazione

$$x = x + 10$$

si dice *impossibile* in quanto non esiste alcun valore di x che sia uguale alla somma di se stesso e di 10.

Osservazione *Risolvere un'equazione* significa trovare, se esistono, le sue soluzioni, cioè quei valori che, sostituiti all' incognita, verificano l' equazione rendendo il primo membro uguale al secondo.

Definizione Due equazioni si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni.

Il concetto di equazioni equivalenti è molto importante per le applicazioni pratiche. Così le due equazioni

$6x + 3 = 4x + 15$ e

$2x = 12$

sono equivalenti, perchè hanno entrambe l' unica soluzione $x = 6$, ma la seconda è evidentemente più semplice della prima!

Per la risoluzione di un' equazione di primo grado vengono sfruttati i seguenti principi di equivalenza.

Primo principio d' equivalenza . *Addizzionando o sottraendo dai due membri di un' equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica contenente l' incognita otteniamo un' equazione equivalente alla data.*

Esempio Consideriamo l' equazione

$3x - 8 = 10$
Addizzioniamo ad ambo i membri il numero 8
$3x - 8 + 8 = 10 + 8$
otteniamo:
$3x = 10 + 8$
Il termine -8 si ritrova nel secondo membro con il segno cambiato.

Osservazione In ogni equazione un termine può essere trasportato da un membro all' altro, purchè lo si cambi di segno.

Osservazione Se nei due membri di un' equazione figurano due termini uguali, essi possono essere soppressi.

Secondo principio d' equivalenza .*Moltiplicando o dividendo i due membri di un' equazione per uno stesso numero diverso da zero otteniamo un' equazione equivalente a quella data.*

Dal secondo principio d' equivalenza si ricavano due notevoli conseguenze.

Osservazione Cambiando il segno a ciascun termine di un' equazione otteniamo un' equazione equivalente a quella data.

Particolarmente utile è la seguente nel caso si stiano trattando equazioni frazionarie.

Osservazione Se un' equazione contiene uno o più termini frazionari possiamo ottenere da essa un' equazione con tutti i termini interi moltiplicando ambo i membri per il minimo comune multiplo di tutti i denominatori.

Esempio Consideriamo l' equazione

$\frac{5x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - x$

Applicando la regola evidenziata nell' osservazione precedente si ottiene:

$\frac{20x+6}{12} = \frac{9-12x}{12}$

$12\frac{20x+6}{12} = \frac{9-12x}{12}12$

e quindi

$20x + 6 = 9 - 12x$

quest' ultima equazione non è più frazionaria.

1.2 Forma normale dell' equazione di 1^o grado

Esempio Le seguenti equazioni

$5x = 15,$
$-2x = 7,$
$4x = 9,$
$-3x = 4,$
$x = -6$

hanno al primo membro un solo termine in x ed al secondo membro il termine noto.

Definizione L' equazione di primo grado si dice *ridotta in forma normale* quando, indicando a e b due numeri interi qualsiasi, può essere rappresentata nella forma

$$ax = b$$

La lettera a si chiama *coefficiente dell' incognita* e la lettera b si chiama *termine noto.*

Osservazione Se un' equazione non è data in forma normale possiamo facilmente ridurla a tale forma applicando ad essa il primo e il secondo principio d' equivalenza..

Esempio Consideriamo l' equazione

$$\frac{2x-3}{12}-\frac{5x+2}{8}=\frac{4-5x}{3}-\frac{1-3x}{6}$$

Moltiplicando ciascun termine dell' equazione per 24 , che è il minimo comune multiplo dei denominatori:

$$24\frac{2x-3}{12}-24\frac{5x+2}{8}=24\frac{4-5x}{3}-24\frac{1-3x}{6}$$

e semplificando si ottengono i passaggi successivi

$$2\,(2x-3)-3\,(5x+2)=8\,(4-5x)-4\,(1-3x)$$

$$4x-6-15x-6=32-40x-4+12x$$

$$4x-15x+40x-12x=6+6+32-4$$

$$17x=40.$$

1.3 Discussione dell' equazione di 1° grado

1.3.1 Premessa.

Si consideri un' equazione nella forma normale

$$ax=b.$$

Se $a\neq 0$ dividendo il primo e il secondo membro per a otteniamo

$$x=\frac{b}{a} \tag{1.1}$$

che è la soluzione dell' equazione data.

Esempio Dall' equazione

$$2x = -7$$

si ottiene

$$x = \frac{-7}{2} = -\frac{7}{2}.$$

Dall' equazione

$$-2x = -12$$

si ottiene

$$x = \frac{-12}{-2} = 6.$$

1.3.2 Modalità di discussione.

Data l' equazione nella forma normale vogliamo esaminare i casi particolari che si presentano nella soluzione quando il coefficiente dell' incognita a o il termine noto b o entrambi risultano uguali a zero.

L' esami di questi casi prende il nome di *discussione dell' equazione*.

1° caso: $a \neq 0$.

La soluzione è $x = \frac{b}{a}$ e se in particolare $b = 0$ abbiamo $x = \frac{0}{a} = 0$ cioè la soluzione è nulla.Concludendo possiamo affermare che se $a \neq 0$ l' equazione ha una sola soluzione e si dice *determinata.*

2° caso: $a = 0$ *e* $b \neq 0$.

L' equazione non ha soluzioni perchè l' eguaglianza $0x = b$ non è possibile. L' equazione in tal caso si dice *impossibile.*

3° caso: $a = 0$ *e* $b = 0$.

L' equazione ha un numero infinito di soluzioni, perchè l' eguaglianza
$0x = 0$
è verificata da qualsiasi valore attribuito alla x. Infatti qualsiasi numero moltiplicato per zero dà per risultato zero. Un' equazione di questo tipo si dice *indeterminata.* Si noti che *ogni equazione indeterminata è una identità.*

1.4 Risoluzione dell' equazione di 1^ogrado.

Vediamo un esempio da cui poi si ricaveranno le regole generali per la risoluzione.

Esempio Risolvere la seguente equazione

$$\frac{(3x+1)^2}{2} = \frac{(6x-1)^2}{8} + \frac{1}{4}$$

L' esrcizio si sviluppa nel seguente modo
$\frac{9x^2+6x+1}{2} = \frac{36x^2-12x+1}{8} + \frac{1}{4}$
$8.\frac{9x^2+6x+1}{2} = 8.\frac{36x^2-12x+1}{8} + 8.\frac{1}{4}$
$4(9x^2+6x+1) = 36x^2 - 12x + 1 + 2$
$36x^2 + 24x + 4 = 36x^2 - 12x + 1 + 2$
$24x + 12x = 1 + 2 - 4$
$36x = -1$
$x = -\frac{1}{36}$

Dall' esempio svolto si ricava la seguente regola generale

Per risolvere un'equazione di primo grado ad una incognita:

1. Si eliminano le eventuali parentesi e si eseguono i calcoli indicati;

2. Si eliminano gli eventuali denominatori moltiplicando ogni termine dell' equazione per il minimo comune multiplo di tali denominatori;

3. Si scrivono al primo membro tutti i termini contenenti l' incognita ed al secondo membro tutti i termini noti, cambiando il segno ai termini che sono stati trasportati da un membro all' altro;

4. Si eseguono le operazioni indicate in modo da ridurre l'equazione alla forma normale o forma tipica $ax = b$;

5. Si dividono ambo i membri dell' equazione ottenuta per il coefficiente dell' incognita, se è diverso da zero, ottenendo così la soluzione dell' equazione e precisamente $x = \frac{b}{a}$

Definizione Si dice che si sta eseguendo una *verifica* di un' equazione quando si sostituisce separatamente nel primo membro e nel secondo membro dell' equazione data, al posto dell' incognita, il valore trovato e si calcola il valore delle espressioni numeriche così ottenute. Se i valori numerici delle due espressioni risultano uguali, il valore sostituito al posto della x è la soluzione dell' equazione.

1.4.1 Esercizi di verifica.

Esercizio Verificare le seguenti identità:

$$(x-4y)^2+(x-y)^2=(x-2y)^2+(x-3y)^2+4y^2$$
$$\left(3+\tfrac{a}{4}\right)^2+\left(1+\tfrac{a}{4}\right)^2=2\left(3+\tfrac{a}{4}\right)\left(1+\tfrac{a}{4}\right)+4$$
$$\left(\tfrac{x^2}{8}+\tfrac{y^2}{2}\right)\left(\tfrac{x^2}{8}-\tfrac{y^2}{2}\right)+\left(\tfrac{x^2}{8}-\tfrac{y^2}{2}\right)^2=\tfrac{x^2}{8}\left(\tfrac{x^2}{4}-y^2\right)$$

Esercizio Risolvere le seguenti equazioni ed eseguite la verifica delle soluzioni trovate:

$$\tfrac{x-2}{3}+\tfrac{x-3}{2}=\tfrac{x-5}{6}+2 \qquad [5]$$
$$\tfrac{x-5}{14}+5=\tfrac{4x-5}{3}+\tfrac{x-5}{6} \qquad [5]$$
$$\tfrac{14x-3}{15}=\tfrac{x+1}{9}+\tfrac{37x-23}{45} \qquad [impossibile]$$
$$\tfrac{x+1}{8}+\tfrac{4x-5}{8}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{5x}{8} \qquad [in\det er\min ata]$$
$$\tfrac{x+1}{10}-\tfrac{2(2x-5)}{15}+\tfrac{16-(x+5)}{3}=\tfrac{14(x-6)}{15} \qquad [7]$$
$$5x+8-\left[\tfrac{25}{3}-\left(\tfrac{20x+29}{2}-\tfrac{20}{3}\right)-\left(-\tfrac{5}{4}-10x\right)\right]=0 \qquad \left[-\tfrac{5}{4}\right]$$
$$\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{5}{2}+x\right)=\tfrac{3}{8}\left(x+\tfrac{2}{3}\right)-\tfrac{x}{8}$$

Esercizio Risolvere le seguenti equazioni ed eseguite la verifica delle soluzioni trovate:

$$\frac{x+\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{2}}-\frac{\frac{x-1}{2}}{\frac{3}{4}-2}-\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3} \qquad [7]$$
$$\frac{11-x}{-\frac{3}{2}}-\frac{\frac{1-2x}{2}}{\frac{3}{5}}=\frac{\frac{3x}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4} \qquad \left[\frac{9}{2}\right]$$
$$\frac{\frac{6x-1}{2}}{5}-\frac{\frac{6x-1}{3}}{4}=\frac{\frac{6x+1}{2}}{6}+\frac{1}{6}-\frac{\frac{6x+1}{3}}{5}+\frac{\frac{x-5}{5}}{4} \qquad [1]$$
$$\frac{\frac{\frac{2(x+6)}{3}}{2}+\frac{x}{4}}{33}-\frac{5(x-3)-4x+11}{22}=-\frac{\frac{x}{4}-\frac{\frac{3(x-4)}{2}}{6}+5}{66} \qquad [12]$$

Esercizio Risolvere le seguenti espressioni rispetto alla lettera indicata nella soluzione fra parentesi quadra:

$$a+2b+3c=d \qquad \left[c=\tfrac{d-a-2b}{3}\right]$$
$$3a-2b+c=d \qquad \left[b=\tfrac{3a+c-d}{2}\right]$$
$$(a+b)\,c=d \qquad \left[a=\tfrac{d-bc}{c}\right]$$
$$\tfrac{a}{b+c}=d \qquad \left[b=\tfrac{a-cd}{d}\right]$$
$$\tfrac{3a+2b-c}{5}=d \qquad \left[a=\tfrac{5d-2b+c}{3}\right]$$
$$5\,(a+b+c)=e \qquad \left[a=\tfrac{e-5b-5c}{5}\right]$$