Chapter 2

Disequazioni di 1^Ogrado

2.1 Diseguaglianze e disequazioni

Oltre al segno di = esistono anche il segno > (maggiore di) ed il segno < (minore di), detti segni di disuguaglianza e si chiama disuguaglianza una scrittura del tipo

$$a > b \qquad oppure \qquad a < b$$

I segni di disuguaglianza > e < possono essere aoppiati con il segno di uguaglianza = ed allora abbiamo rispettivamente i segni $\geqslant$ (maggiore o uguale a) e $\leqslant$ (minore o uguale a).

Le disuguaglianze contenenti lettere si chiamano equazioni.

Definizione Si dice *disequazione* una disuguaglianza fra due espressioni, una almeno delle quali è letterale, che è verificata per particolari valori attribuiti alla lettera o alle lettere che in essa figurano e che si dicono incognite.

In questo capitolo ci occuperemo delle disequazioni di primo grado ad una sola incognita ed intere, cioè tali che l' incognita non figura al denominatore.

Definizione Si dice *soluzione o radice* di una disequazione ogni valore che, sostituito all' incognita, verifica la disequazione trasformandola in una disuguaglianza numerica.

Esempio La disequazione

$$x > 3$$

è verificata da tutti i numeri reali maggiori di 3. Le soluzioni sono in numero *infinito*. Se sostituiamo alla lettera x nella disequazione $x > 3$ una di tali soluzioni, ad esempio $x = 4$, otteniamo una disuguaglianza numerica:

$$4 > 3$$

che è corretta e vera.

Definizione *Risolvere* una disequazione significa trovare,se esistono, le sue soluzioni, cioè quei valori che, sostituiti all' incognita, verificano la disequazione trasformandola in una disuguaglianza numerica corretta.

Le soluzioni di questa disequazione si possono rappresentare su una semiretta r mediante le immagini di tutti i numeri reali maggiori di 3. La semiretta avente per origine l' immagine del numero 3 ed il verso positivo, esclusa l' origine, rappresenta le soluzioni della disequazione $x > 3$ (vedi figura 2.1).

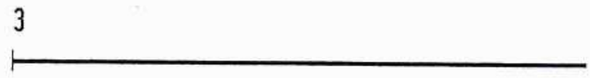

Figure 2.1: rappresentazione di $x > 3$

Se invece, la disequazione è $x \geqslant 3$ l' immagine del numero 3 non viene esclusa dalla rappresentazione dell' insieme delle soluzioni (figura 2.2).

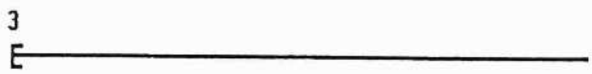

Figure 2.2: rappresentazione di $x \geq 3$

2.2 Proprietà delle diseguaglianze

Per la soluzione delle disequazioni facciamo riferimento alle corrispondenti **proprietà** delle diseguaglianze ed ai **principi** di equivalenza delle equazioni che vengono applicati in modo analogo.

1 Addizionando o sottraendo da entrambi i membri di una disuguaglianza uno stesso numero otteniamo una disuguaglianza dello stesso verso della prima, infatti se $8 > 3$ allora $8 + 4 > 3 + 4$ cioè $12 > 7$.

2 In ogni disuguaglianza un termine può essere trasportato da un membro all' altro purchè si cambi il suo segno, infatti se $8-2 < 9$ allora $8 < 9+2$ cioè $8 < 11$.

3 Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una diguaglianza per uno stesso numero positivo otteniamo una disuguaglianza dello stesso verso della prima, infatti se $7 > 3$ allora $7 * 2 > 3 * 3$ cioè $14 > 6$.

4 Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero negativo otteniamo una disuguaglianza avente il verso opposto a quello della prima, infatti se $5 > 2$ allora $5 * (-3) < 2 * (-3)$, cioè $-15 < -6$.

5 Cambiando il segno a tutti i termini di una disuguaglianza otteniamo una disuguaglianza di verso opposto a quello della prima, infatti se $4-1 < 7$ allora $-4 + 1 > -7$ cioè $-3 > -7$.

2.3 Risoluzione delle disequazioni

Esaminiamo inizialmente le disequazioni del tipo

$$ax > b,$$

$$ax \geqslant b,$$

$$ax < b,$$

$$ax \leqslant b,$$

nelle quali a e b rappresentano numeri interi relativi noti ed x l' incognita: Le disequazioni precedenti si dicono **ridotte a forma normale.**

Esempio Data la disequazione $3x > 15$,dividendo per 3 entrambi i membri della disequazione questa conserva il verso della disuguaglianza $\frac{3x}{3} > \frac{15}{3}$ e quindi si ottiene $x > 5$ (vedi figura 2.3).

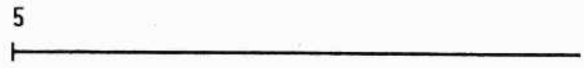

Figure 2.3: Soluzione di $3x > 15$

Esempio Data la disequazione $-2x > 6$, dividendo per -2 entrambi i membri della disequazione si cambia il verso della disuguaglianza $\frac{-2x}{-2} < \frac{6}{-2}$ e quindi si ottiene $x < -3$ (vedi figura 2.4).

Figure 2.4: Soluzione di $-2x > 6$

Esempio Data la disequazione $-2x \leqslant 3$., dividendo per -2 ambo i membri della disequazione si cambia il verso della disuguaglianza $\frac{-2x}{-2} \geqslant \frac{3}{-2}$ e quindi si ottiene $x \geqslant -\frac{3}{2}$ (vedi figura 2.5)

Osservazione Se una disequazione non è ridotta a forma normale si esguono prima i calcoli necessari per ridurla a tale forma.

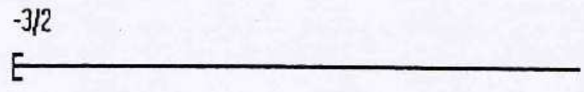

Figure 2.5: Soluzione di $-2x \leq 3$

Esempio Sia data la disequazione

$$\frac{2x}{3} - x + \frac{1}{5} \geqslant \frac{1}{6} + 2x$$

Il minimo comune multiplo dei denominatori è 30; si hanno i passaggi seguenti:

$$30\frac{2x}{3} - 30x + 30\frac{1}{5} \geqslant 30\frac{1}{6} + 30.2x$$

$$20x - 30x + 6 \geqslant 5 + 60x$$

$$20x - 30x - 60x \geqslant 5 - 6$$

$$-70x \geqslant -1$$

$$70x \leqslant 1$$

ed infine si ottiene

$$x \leqslant \frac{1}{70}$$

soluzione rappresentata dalla figura 2.6.

Figure 2.6: Soluzione di $\frac{2x}{3} - x + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{6} + 2x$

2.4 Determinate, indeterminate ed impossibili

Le disequazioni risolte nel paragrafo precedente si dicono **determinate** perchè hanno soluzioni costituite da un insieme infinito di numeri reali maggiori o minori di un dato numero. Se nella disequazione compare anche il segno di uguaglianza, tale numero appartiene all' insieme delle soluzioni della disequazione stessa.

Le soluzioni di una disequazione si possono rappresentare mediante tutti i punti di una semiretta.

Definizione La disequazione $x + 1 > x$ è verificata per qualsiasi valore attribuito all' incognita x . Una disequazione come la precedente si dice **indeterminata** se è verificata da qualsiasi numero reale. In tal caso le soluzioni si possono rappresentare da tutti i punti di una retta. Applicando il procedimento risolutivo alla disequazione data otteniamo:

$x - x + 1 > 0$

$1 > 0$, che è una disequazione sempre verificata. Pertanto l' insieme delle soluzioni è per ogni x, cioè la retta. La soluzione è rappresentata dalla figura 2.7.

Figure 2.7: Soluzione di $x + 1 > x$

Definizione La disequazione $x+3 < x$ è **impossibile** cioè non ha soluzioni; infatti la disuguaglianza $3 < 0$ è falsa.

L' insieme dei punti soluzione è vuoto.

2.4.1 Esercizi di verifica.

Esercizio Riconoscere tra le seguenti disuguaglianze quelle esatte e quelle errate:

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} < 1,$
$\frac{7}{8} - \frac{3}{4} < 0,$
$6 - \frac{1}{5} < -6,$
$-\frac{2}{3} - \frac{3}{4} < -1.$

Esercizio Scrivete le diseguaglianze che si ottengono dividendo prima per 2 e poi per -2 i membri di ciascuna delle seguenti disuguaglianze

$6 < 8,$
$-4 > -10,$
$3 < 4,$
$8 > -4,$
$10 < 20,$
$-8 > -12,$
$-5 < -2,$
$-8 < 0,$
$-3 < -2,$
$-10 > -12.$

Esercizio Indicate almeno una coppia di valori di x e di y tali che verifichino le seguenti disequazioni

$-\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y \geqslant -1,$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y > 5,$
$x - \frac{3}{4} < 0.$

Esercizio Risolvere le seguenti disequazioni e rappresentare le soluzioni, quando esistono, su una retta orientata:

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x < 7 \qquad [x < 12],$
$4x + 7 - (5x + 2) > -3x - 5 \qquad [x > -5],$
$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geqslant 1 \qquad \left[x \geqslant \frac{6}{5}\right],$
$\frac{x+8}{6} < \frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} \qquad \left[x > \frac{11}{4}\right].$