Chapter 4

Geometria analitica

4.1 La retta

Le coordinate dei punti che appartengono ad una retta e, in generale, a una curva del piano definita mediante una legge, sono legate da una relazione che risulta soddisfatta dalle coordinate di tutti i punti della retta e solo da essi.

Nel caso della retta si può dimostrare il

Teorema La condizione di *appartenenza di un punto a una retta* si esprime mediante una equazione

$$ax + by + c = 0$$

con a e b non contemporaneamente nulli; tale equazione è lineare nelle coordinate x e y dei punti. Viceversa, ogni equazione lineare in x e y rappresenta una retta.

Cominciamo a dimostrare che una retta individua un' equazione lineare in x e y .

Consideriamo una retta passante per l' origine degli assi e non coincidente con gli assi cartesiani (vedi figura 4.1).

Siano $P_1\left(x_1, y_1\right)$, $P_2\left(x_2, y_2\right)$, $P_3\left(x_3, y_3\right)$,......punti sulla retta. I triangoli OP_1Q_1, OP_2Q_2, OP_3Q_3,....sono tutti simili tra loro e quindi risulta:

$$\frac{Q_1P_1}{OQ_1} = \frac{Q_2P_2}{OQ_2} = \frac{Q_3P_3}{OQ_3} = ...,$$

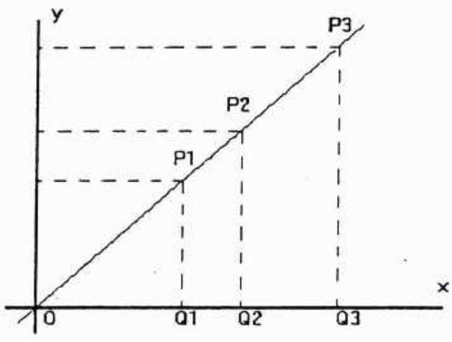

Figure 4.1: Retta passante per tre punti

tali rapporti si possono scrivere:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = ...$$

Detto m il rapporto costante $\frac{y_1}{x_1}$,si può asserire che se un punto appartiene ad una retta passante per O , e le sue coordinate sono (x, y) ,vale la relazione:

$$\frac{y}{x} = m$$

cioè

$$y = mx$$

Viceversa si dimostra che se un punto non appartiene alla retta, le sue coordinate non soddisfano l' equazione.

Infatti , detto R un punto di coordinate (x_r, y_r) non appartenente alla retta, considerando il punto S sulla retta avente la stessa ascissa x_r e un' ordinata mx_r , risulta $y \neq mx_r$, da cui si deduce che le coordinate di R non soddisfano l' equazione.

Definizione Il numero reale m è detto *coefficiente angolare* della retta.

Definizione Se la retta non passa per O e non è parallela all' asse delle ordinate, la sua equazione è:

$$y = mx + n \tag{4.1}$$

Questa è detta *equazione di una retta* generica del piano; essa rappresenta tutte le rette del piano, escluse quelle parallele all' asse delle ordinate.

Le rette *parallele all' asse dell' ascisse* hanno da esso distanza costante, perciò la loro equazione è:

$$y = n;$$

ciò è confermato dal fatto che il loro coefficiente è nullo, poichè $m = 0$.

Invece le rette che sono *parallele all' asse delle ordinate* con si possono esprimere con la 4.1. Tuttavia , tenendo conto che i punti di queste rette hanno distanza costante dall' asse delle ordinate, la loro equazione è data da

$$x = k.$$

In particolare, gli *assi coordinati* hanno equazione:

$$y = 0$$

che rappresenta l'asse delle ascisse, mentre

$$x = 0$$

rappresenta l' asse delle ordinate.
Si ha il seguente:

Teorema Ogni equazione di 1^o grado nelle due variabili x e y è l'equazione di una retta.

La forma più generale di un' equazione di 1^o grado nelle due variabili x e y è

$$ax + by + c = 0 \tag{4.2}$$

Dividendo per b e isolando la y si ottiene

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Pertanto si trova che

$$m = -\frac{a}{b}$$

La (4.2) con a e b non entrambi nulli; essa è detta *equazione generale della retta* o equazione della retta in forma implicita; essa rappresenta tutte le rette del piano.

Corollario L' equazione $y = mx + n$ rappresenta l' equazione di una retta

- non passante per O e non parallela agli assi se $m \neq 0$ e $n \neq 0$
- passante per O se $m \neq 0$ e $n = 0$
- parallela all' asse delle ascisse se $m = 0$

4.1.1 Equazione delle rette passanti per $P(x_1, y_1)$

La condizione di appartenenza di un punto $P(x_1, y_1)$ ad una retta del piano di equazione $y = mx + n$ è data da $y_1 = mx_1 + n$, dalla quale si ricava n e lo si sostituisce nell' equazione generale ottenendo

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{4.3}$$

Definizione La 4.3 è detta *equazione del fascio proprio di centro* $P(x_1, y_1)$

La 4.3 rappresenta tutte le infinite rette passanti per P, esclusa quella di equazione $x = x_1$

Se consideriamo l' equazione generale della retta $ax + by + c = 0$, imponendo al punto $P(x_1, y_1)$di appartenere alla retta, con calcoli analoghi ai precedenti si ricava:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

che è l' equazione del fascio di centro P inclusa la retta $x = x_1$

4.1.2 Equazione della retta passante per due punti

Per determinare l' equazione della retta che unisce due punti $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, non appartenenti ad una parallela agli assi, cioè tali che $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, consideriamo dapprima l' equazione del fascio di centro P :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Fra queste infinite rette una sola passa per Q; imponendo la condizione di appartenenza di Q , si ricava:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sostituendo questo valore di m nella precedente equazione, si ottiene l' *equazione della retta passante per due punti:*

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{4.4}$$

Se i punti appartengono ad una parallela agli assi, l' equazione della retta risulta, rispettivamente:

$y = y_1$ se parallela all' asse dell' ascisse
$x = x_1$ se parallela all' asse delle ordinate

Esempio L' equazione del fascio di centro $P(1,3)$ è:

$$y - 3 = m(x - 1)$$

a cui si aggiunge la retta di equazione $x = 1$,
oppure:

$$a(x - 1) + b(y - 3) = 0$$

Esempio Dati tre punti $A(1,2)$, $B(3,-2)$, $C(2,2)$ l' equazione della retta passante per A e B è

$$\frac{y - 2}{-2 - 2} = \frac{x - 1}{3 - 1}$$

Calcolando il minimo comune multiplo e portando tutti i termini a sinistra si può scrivere:

$$2x + y - 4 = 0.$$

L' equazione della retta passante per A e C è:

$$y = 2.$$

Esempio Rappresentare graficamente le funzioni dell' interesse semplice e del montante per un capitale $C = 100$ impiegato al tasso annuo $i = 0,20$.

L' interesse è dato dalla funzione:

$$I = 20t$$

che si rappresenta mediante una retta passante per l' origine con coefficiente angolare 20.

Il montante è dato dalla funzione:

$$M = 100 + 20t$$

che si rappresenta mediante una retta non passante per l' origine di coefficiente angolare 20 e quindi parallela alla precedente retta.

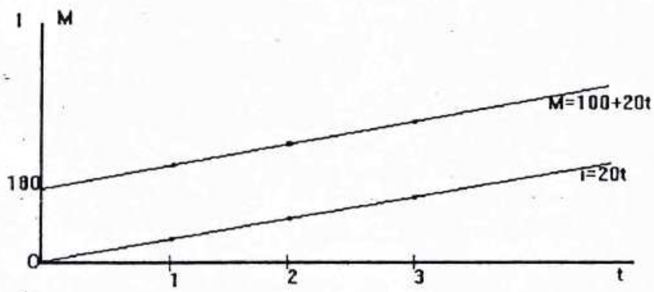

Figure 4.2: Rappresentazione grafica dell' intersesse e del montante

Si ottiene il grafico di figura 4.2 (dove sugli assi I e t sono state assunte unità di misura diverse).

Esempio Rappresentazione grafica dell' interesse semplice con tassi diversi.
Sia C=1; rappresentare graficamente la legge dell' interesse semplice per i seguenti tassi annui:

$$10\%, \quad 15\%, \quad 20\%, \quad 25\%$$

Si devono rappresentare le seguenti funzioni:

$$I = 0,10t; \quad I = 0,15t; \quad I = 0,20t; \quad I = 0,25t$$

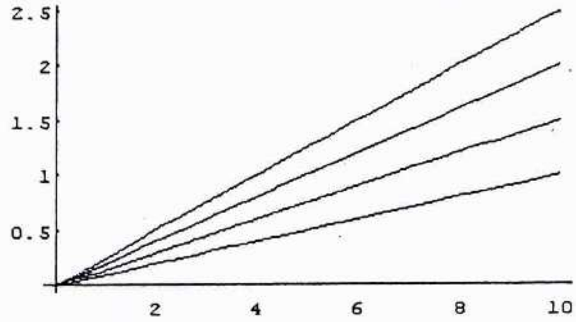

Figure 4.3: Rappresentazione dell' interesse al variare del tasso annuo

All' aumentare del coefficiente angolare aumenta l' inclinazione della retta rispetto all' asse delle ascisse, vedi figura 4.3.

4.1.3 Intersezione di due rette

Per determinare le coordinate del punto di intersezione fra due rette, si deve risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due rette:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Esempio Assegnate le rette di equazione:

$$2x - y + 3 = 0$$

$$x + y - 5 = 0$$

risolvendo il sistema suggeritoci dalla (4.5), si ricava che esse sono incidenti nel punto $P\left(\frac{2}{3}, \frac{13}{3}\right)$

Esempio Le rette di equazione:

$$x - 2y + 1 = 0$$

$$2x - .4y + 5 = 0$$

danno luogo ad un sistema incompatibile, si deduce pertanto che sono rette parallele e distinte.

Infatti si può verificare che hanno entrambe lo stesso coefficiente angolare $\frac{1}{2}$.

4.1.4 Parallelismo e perpendicolarità fra rette

La *condizione di parallelismo fra due rette* , è data da:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$$

oppure:

$$m = m_1$$

La *condizione di perpendicolarità fra due rette* non parallele agli assi cartesiani è invece data da:

$$aa_1 + bb_1 = 0$$

oppure:

$$mm_1 + 1 = 0$$

Esempio Scrivere le equazioni delle rette passanti per il punto $P(2, 1)$ e, rispettivamente, parallela e perpendicolare alla retta di equazione

$$3x - y + 1 = 0.$$

Il fascio di rette di centro P ha equazione:

$$y - 1 = m\,(x - 2)$$

La retta assegnata ha coefficiente angolare $m = 3$, perciò:
la parallela per P ha equazione: $y - 1 = 3\,(x - 2)$;
la perpendicolare per P ha equazione: $y - 1 = -\frac{1}{3}\,(x - 2)$.

4.1.5 Distanza fra due punti.

Siano dati due punti, $A\,(x_1, y_1)\,, B\,(x_2, y_2)$ del piano cartesiano xOy.
La distanza fra A e B è data dalla seguente formula:

$$d = d\,(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

4.1.6 Distanza di un punto da una retta.

Per determinare la distanza di un punto $P\,(x_1, y_1)$ da una retta r di equazione $ax + by + c = 0$, si deve

– scrivere l' equazione della retta p, passante per P e perpendicolare alla r,

– determinare le coordinate del punto H intersezione di r e p,

– calcolare la distanza fra i due punti P ed H.

Si ottiene l' espressione:

$$d = \overline{PH} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

4.2 La parabola

Definizione Si definisce *parabola* il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso, detto *fuoco* e da una retta fissa detta *direttrice*.

Applicando la precedente definizione si ottiene il grafico di figura 4.4.

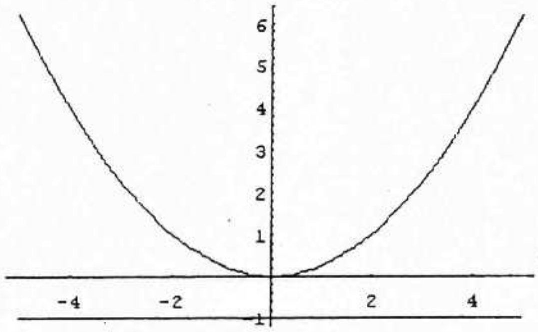

Figure 4.4: Grafico della parabola

Definizione L' equazione di una parabola passante per l' origine assume la forma

$$y = ax^2 \tag{4.6}$$

La parabola è il grafico di una funzione di secondo grado.

Dalla equazione 4.6 si rileva che la parabola è simmetrica rispetto all' asse delle y, che viene detto *asse della parabola.*

In generale, in un qualsiasi sistema di riferimento, la parabola è simmetrica rispetto alla retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice, detta *asse della parabola.*

Il fuoco è un punto dell' asse della parabola e , per la parabola data dalla equazione (4.6), ha coordinate:

$$F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$$

L' asse della parabola incontra la parabola in un punto detto *vertice* che, sempre per la parabola data dalla (4.6), coincide con l' origine $O\,(0,0)$ del sistema di riferimento.

Per tracciare il grafico di una parabola si determinano, oltre al vertice alcuni punti.

Esempi Tracciare i grafici delle seguenti parabole:

$$y = x^2$$

Si predispone la seguente tabella

x	...	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	...	16	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	16

Dalla tabella si ottiene il grafico in figura 4.5.

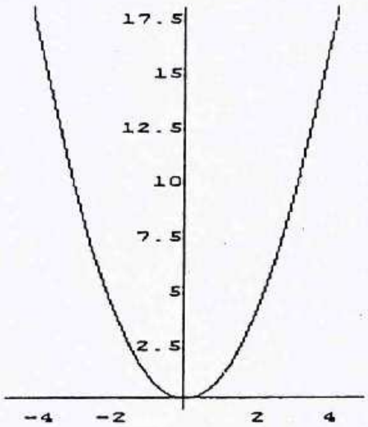

Figure 4.5: Grafico di $y = x^2$

Si consideri ora la seguente equazione

$$y = 2x^2$$

Si predispone la tabella

x	...	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	...	32	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8	32

e si ottiene quindi il grafico relativo (vedi figura 4.6).
Si consideri infine l' equazione

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

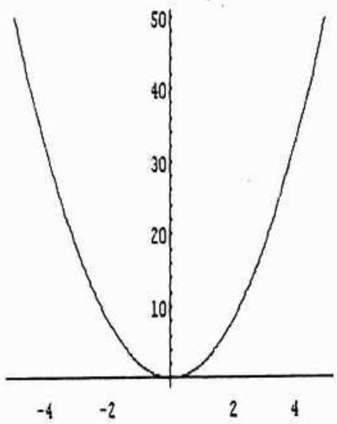

Figure 4.6: Grafico di $y = 2x^2$

Si predispone la tabella

x	...	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	...	32	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8	32

da cui si ricava il grafico in figura 4.7.

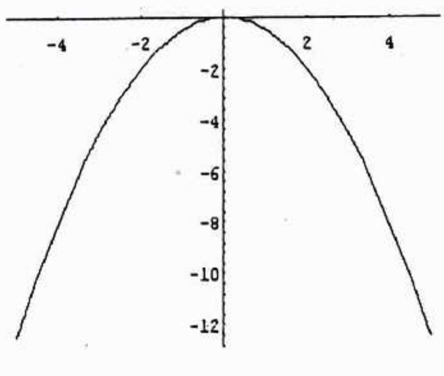

Figure 4.7: Grafico della parabola $y = -\frac{1}{2}x^2$

Se nell' equazione della parabola

$$a > 0,$$

si dice che la parabola "volge la concavità verso l' alto", se

$$a < 0,$$

si dice che "volge la concavità verso il basso".

L' equazione 4.6 della parabola dipende dal sistema di riferimento scelto.

Se si assumesse come asse delle x la perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco e come asse delle y la parallela alla direttrice passante per il punto O equidistante dal fuoco e dalla direttrice, l' equazione avrebbe la forma:

$$x = ay^2$$

Assumendo come sistema di riferimento con l' asse delle x parallelo alla direttrice e quello delle y parallelo all' asse della parabola, si ottiene l' *equazione della parabola* nella forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Se si assumesse un sistema di riferimento qualsiasi e se la direttrice non è parallela ad uno degli assi, si ottiene l' equazione della parabola in forma generale come equazione di 2° grado in entrambe le variabili, non più espressa come funzione.

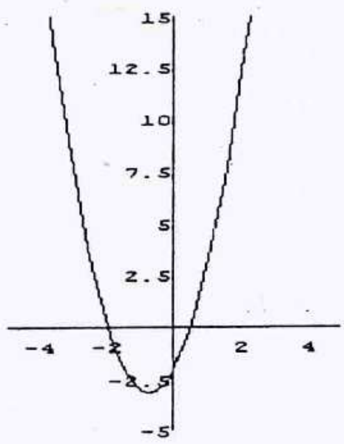

Figure 4.8: Parabola con asse parallelo all' asse y

Il caso che utilizzeremo più frequentemente è quello della parabola con asse parallelo all' asse y (vedi figura 4.8). In tal caso si deve considerare l' equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

con:

$$vertice\ V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right), \tag{4.7}$$

asse della parabola di equazione $x = -\dfrac{b}{2a}$ parallelo all'asse delle ordinate,

$$fuoco\ F\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a} + \frac{1}{4a}\right),$$

$$\textit{direttrice} \text{ di equazione } y = -\frac{b^2-4ac}{4a} - \frac{1}{4a}$$

Esempio Data la parabola di equazione:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$$

determinare le coordinate del vertice e del fuoco, le equazioni dell' asse e della direttrice. Applicando le relazioni 4.7 si ottiene:

$$V\left(-3, \frac{13}{2}\right); \qquad F(-3, 6);$$

ed inoltre, equazione dell' asse:

$$x = -3;$$

equazione della direttrice:

$$y = 7.$$

4.2.1 Problemi sulla parabola

4.2.2 a) Ricerca dell' equazione della parabola soddisfacente a condizioni assegnate

Detta $y = ax^2 + bx + c$ l' equazione generale della parabola con asse parallelo all' asse delle y, si devono determinare i parametri a, b, c in modo da ottenere la parabola soddisfacente alle condizioni assegnate.

Esempio Studiamo un animale che salta, come una pulce, un gatto o un delfino. La legge di Galilei stabilisce che il centro di gravità è soggetto alla stessa accelerazione per tutti i corpi, a condizione che si trascuri la resistenza dell' aria. Il movimento del centro di gravità è definito dalla stessa legge qualunque azione l' animale esegua durante il salto. Consideriamo il livello più alto raggiunto dal centro di gravità. Sia $t = 0$ l' istante in cui viene raggiunto il livello più alto e s indichi la distanza verticale del centro di gravità misurata dal suo livello più alto. Allora:

$$s = \frac{g}{2}t^2$$

dove g è l' accelerazione di gravità. La formula definisce una funzione potenza e precisamente una funzione quadratica. Si possono includere valori negativi di t , cioè considerare il tempo prima che l' animale raggiunga il punto culminante. Allora s è anche la distanza verticale dal culmine. Il grafico della funzione è una parabola.

4.2.3 Esercizi di verifica.

Esercizio Tracciare il grafico delle seguenti parabole dopo aver determinato le coordinate del vertice e delle intersezioni con gli assi cartesiani:

a) $y = x^2 - 2x - 4$
b) $y = -x^2 + 5$
c) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$
d) $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$
e) $y = 2x - x^2$
f) $y = -2x^2 + 5x - 4$

Esercizio Scelte opportune unità di misura, rappresentare graficamente le seguenti parabole, dopo aver determinato le coordinate del vertice e delle intersezioni con gli assi:

a) $y = 0,1x^2 + 100x - 11.000$
b) $y = -x^2 + 500x$
c) $y = 0,05x^2 - 300x + 50.000$
d) $y = -0,2x^2 + 200x - 20.000$

Esercizio Scrivere l' equazione della parabola con l' asse parallelo all' asse delle y avente il vertice nel punto $V(-1,-1)$, e passante per il punto $P(1,-5)$.

$[y = -x^2 - 2x - 2]$

Esercizio Scrivere l' equazione della parabola con asse parallelo all' asse delle ascisse e passante per i punti $A(-1,1), B(3,-2), C(2,-2)$.

$\left[x = \frac{5}{4}y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{5}{2}\right]$

4.2.4 b) Intersezioni fra parabola e retta. Rette tangenti ad una parabola.

Per **trovare le coordinate delle eventuali intersezioni** fra una *parabola* ed una *retta* si risolve il sistema formato dalle rispettive equazioni.

Il sistema può avere:
- *due soluzioni reali e distinte*, ed in tal caso la retta è *secante* la parabola;
- *due soluzioni reali e coincidenti,* e allora la retta è *tangente* alla parabola;
- *nessuna soluazione reale,* e in questo caso la retta è *esterna* alla parabola.

Per determinare l'equazione delle tangenti condotte alla parabola da un punto P del piano, si dovrà determianare, fra le rette del fascio di centro P, la retta (se P appartiene alla parabola) o le rette (se P è esterno alla parabola) che intersecano la parabola in due punti reali e coincidenti.

4.3 La circonferenza

Definizione Secondo la definizione classica, si dice *circonferenza* il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro.

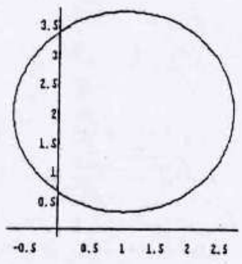

Figure 4.9: Grafico di una circonferenza

Sul piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, sia $C(\alpha, \beta)$ il centro e sia r il raggio della circonferenza (vedi figura 4.9).

La condizione "P appartiene alla circvonferenza" è soddisfatta se e solo se risulta:

$$\overline{CP} = r$$

Dette x e y le coordinate del punto P appartenente alla circonferenza, si ha:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r$$

Elevando ambo i membri a quadrato si ottiene:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \tag{4.8}$$

La (4.8) è soddisfatta da ogni punto appartenente alla circonferenza e , viceversa, ogni punto le cui coordinate la soddisfano, appartiene alla circonferenza.

Sviluppando la (4.8) si ottiene:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Ponendo:

$$-2\alpha = a, -2\beta = b, \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c \tag{4.9}$$

l' equazione della circonferenza può essere rappresentata nella forma:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{4.10}$$

che è una relazione fra x e y espressa da un' equazione di 2^o grado, non contenente il termine xy e nella quale i coefficienti di x^2 e di y^2 sono uguali tra loro.

Quindi, ogni circonferenza si può esprimere mediante una equazione di 2^o grado in x e y avente le caratteristiche sopra indicate.

Analizziamo il viceversa.

La (4.10) rapresenta una circonferenza se la possiamo mettere nella forma (4.8) per determinare centro e raggio.

Tenendo presente (4.9) si ha:

$$\alpha = \frac{a}{2}, \beta = \frac{b}{2}$$

e quindi:

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

- *I° caso*

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c > 0$$

l' equazione (4.10) rappresenta una circonferenza di centro $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ e raggio

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

- *2° caso*

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = 0$$

l' equazione (4.10) rappresenta il punto $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ e si tratta perciò di una circonferenza di centro nullo.

- *3° caso*

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c < 0$$

In questo caso la (4.10) non rappresenta una circonferenza reale.

Esempio Trovare l' equazione della circonferenza di centro $C(1,2)$ e raggio 2. Verificare inoltre se i punti $P(-1,2)$, $Q(2,3)$ appartengono alla circonferenza.

Svolgimento: l' equazione della circonferenza è:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

e sviluppando si ha:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

Il punto P appartiene alla circonferenza; infatti sostituendo nel primo membro dell' equazione le coordinate del punto P si ha:

$$(-1)^2 + 2^2 - 2(-1) - 4(2) + 1 = 0$$

Invece il punto Q non appartiene alla circonferenza perchè, sostituendo le sue coordinate nell' equazione della circonferenza, si ha:

$$2^2 + 3^2 - 2(2) - 4(3) + 1 = -2 \neq 0$$

Esempio Trovare l' equazione della circonferenza avente centro $C(-3,4)$ e passante per il punto $P(1,3)$.

Si determina il raggio, che è la misura del segmento $\overline{CP}$:

$$\overline{CP} = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{17}$$

L' equazione della circonferenza risulta:

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 17$$

e sviluppando:

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 8 = 0$$

4.3.1 Problemi sulla circonferenza

Intersezioni fra retta e circonferenza

Per determinare le intersezioni fra una retta ed una circonferenza occorre risolvere il sistema formato dalle loro equazioni.

Se il sistema ammette *due soluzioni reali e distinte* la retta è *secante* alla circonferenza.

Se il sistema ammette *due soluzioni reali e coincidenti* la retta è *tangente* alla circonferenza.

Se il sistema non ammette *soluzioni reali* la retta è *esterna* alla circonferenza.

Esempio 1 Determinare le intersezioni fra la circonferenza:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$$

di centro $C(2, -1)$ e raggio $r = \sqrt{2}$ e la retta:

$$2x + y - 2 = 0$$

Le eventuali intersezioni si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

che ammette le radici:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{11}{5} \\ y_2 = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

quindi la retta interseca la circonferenza nei punti:

$$A(1,0),\ B\left(\frac{11}{5}, -\frac{12}{5}\right)$$

come si vede anche graficamente dalla 4.10.

Esempio 2 Determinare le intersezioni fra la circonferenza.

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$$

di centro $C(1, 1)$ e raggio $r = \sqrt{5}$ e la retta:

$$x + 2y - 8 = 0$$

Si risolve il sistema

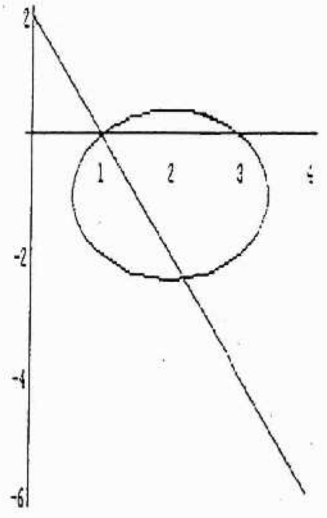

Figure 4.10: Intersezione esempio 1.

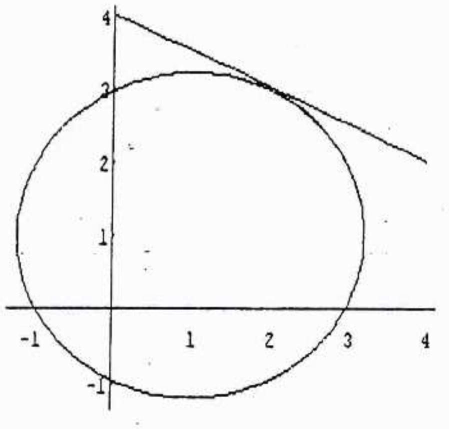

Figure 4.11: Intersezione esempio 2.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

e si ottengono le due radici coincidenti:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 2 \\ y_1 = y_2 = 3 \end{cases}$$

quindi la retta è tangente alla circonferenza nel punto $P\,(2,3)$ come si vede nella figura 4.11

Esempio 3 Determinare la posizione della circonferenza:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

di centro $O(0,0)$ e raggio $r = 2$ rispetto alla retta:

$$x + y = 3$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

si giunge all' equazione:

$$2x^2 - 6x + 5 = 0$$

il cui discriminante è negativo:

$$\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$$

quindi il sistema non ammette radici reali e la retta è esterna alla circonferenza (vedi figura 4.12).

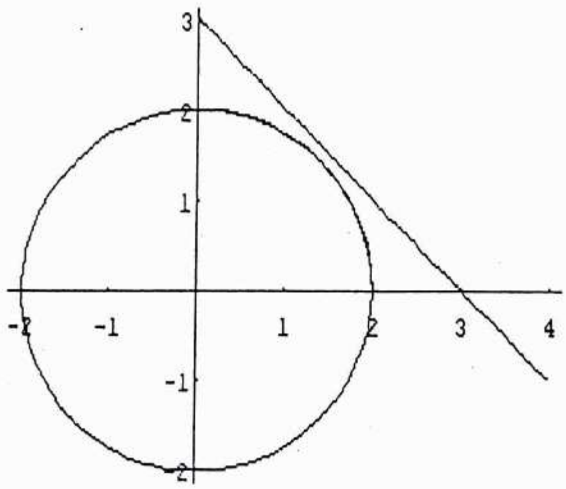

Figure 4.12: Intersezione esempio 3.

4.3.2 Esercizi di verifica.

Esercizio Scrivere l' equazione della circonferenza avente centro e raggio assegnati:

a) $C(0,0), r=3;$ $\quad [x^2+y^2-9=0]$
b) $C(2,1), r=2$ $\quad [x^2+y^2-4x-2y+1=0]$

Esercizio Verificare se i seguenti punti

$$A(1,1), B(3,0), C(-1,-1), D\left(\frac{7}{5},-\frac{24}{5}\right)$$

appartengono alla circonferenza, sono interni o sono esterni alla circonferenza di equazione:

$$x^2+y^2-2x+4y-3=0$$

[B e D appartengono alla circonferenza, A è esterno, C è interno]

Esercizio Trovare l' equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici $A(1,2), B(-1,0), C(-1,-3)$

$[x^2 + y^2 - 5x + 3y - 6 = 0]$

Esercizio Esaminare se le seguenti rette:

a) $2x - y + 2 = 0$
b) $3x - 4y - 9 = 0$
c) $x - y + 3 = 0$
d) $4x + 3y - 12 = 0$
sono secanti, tangenti , esterne alla circonferenza di equazione:
$x^2 + y^2 - 2x + 3y - 3 = 0$
$\left[\begin{array}{c} \text{a) è secante in } (-1,0)\,,\ \left(-\frac{7}{5}, -\frac{4}{5}\right)\,;\ \text{b) è secante in } (3,0)\,,\ (-1,3)\,; \\ \text{c) è esterna; d) è tangente in } (3,0) \end{array}\right]$

4.4 L' iperbole equilatera.

L' equazione generale dell' iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

diventa

$$x^2 - y^2 = a$$

se $a = b$; in quest' ultimo caso si parla di *iperbole equilatera.*

Definizione L' iperbole equilatera è molto importante nello studio delle funzioni, quando il sistema di riferimento cartesiano coincide con gli asintoti; tale iperbole si ottiene ruotando di 45^o l' iperbole precedente e si può dimostrare che l' equazione assume la forma:

$$xy = k \tag{4.11}$$

e l' iperbole si dice quindi *equilatera riferita agli asintoti.*
L' iperbole equilatera è il grafico della funzione:

$$f : \begin{cases} R_o \longrightarrow R_o \\ x \longrightarrow y = \frac{k}{x} \end{cases} \tag{4.12}$$

Osservazione Se $k > 0$, le coppie (x, y) di valori corrispondenti sono concordi ed il grafico della funzione quindi è situato nel 1^o e 3^o quadrante (vedi grafico 4.13, dove $k = 6$).

Se $k < 0$, le coppie (x, y) di valori corrispondenti sono discordi ed il grafico della funzione quindi è situato nel 2^o e 4^o quadrante.

La curva è simmetrica rispetto all' origine e gli asintoti sono gli assi cartesiani.

Nel caso particolare $k = 0$ l' equazione (4.11) diventa:

$$xy = 0$$

e l' iperbole degenera nei due assi coordinati.

La funzione (4.12) con $k > 0$ è molto utilizzata nelle scienze applicate perchè rappresenta la *proporzionalità inversa* fra due grandezze.

Esempio Tracciare il grafico dell' iperbole equilatera di equazione:

$$xy = 6$$

La funzione

$$y = \frac{6}{x}$$

può essere facilmente rappresentata per punti, assegnando ad x i valori $-12, -6, -3,$ *etc*... si ottengono i corispondenti valori di y. Si costruisce così la seguente tabella:

x	...	-12	-6	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	1	2	3	6	12	...
y	...	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-6	-12	...	12	6	3	2	1	$\frac{1}{2}$	...

ottenendo la figura 4.13.

Una generalizzazione della funzione

$$y = \frac{k}{x}$$

è la funzione:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

con $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$, detta *funzione omografica*, che è definita per ogni numero reale $x \neq -\frac{d}{c}$.

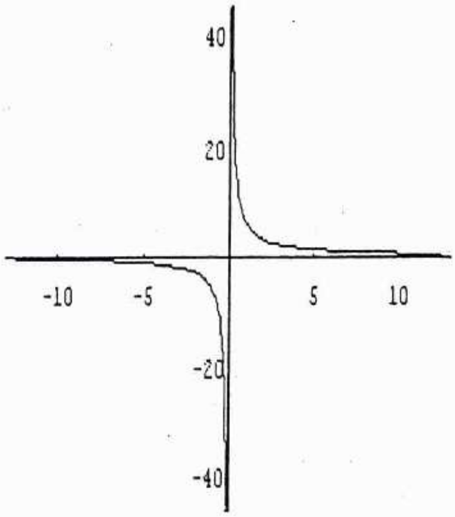

Figure 4.13: Grafico dell' iperbole $y = \frac{6}{x}$

Osservazione Si deve porre la condizione $c \neq 0$ perchè se fosse $c = 0$ la funzione sarebbe una funzione lineare e quindi si rappresenterebbe con una retta. Analogamente si deve porre la condizione $ad - bc \neq 0$ perchè se fosse $ad = bc$ i coefficienti del numeratore sarebbero proporzionali ai coefficienti del denominatore; si avrebbe:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = h$$

ne seguirebbe $a = hc, b = hd$ e quindi la funzione diventerebbe:

$$y = \frac{hcx + hd}{cx + d} = h$$

ossia sarebbe una funzione costante il cui grafico è una retta parallella all' asse delle ascisse.

Con alcuni passaggi si può vedere che il grafico della funzione omografica è un 'iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi coordinati, asintoti di equazioni:

$$x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c}$$

Infatti operando una traslazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + \frac{d}{c} \\ y' = y - \frac{a}{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x' - \frac{d}{c} \\ y = y' + \frac{a}{c} \end{cases}$$

con alcuni passaggi si giunge alla funzione:

$$y' = \frac{bc - ad}{c^2 x'}$$

e quindi posto

$$\frac{bc - ad}{c^2} = k$$

si ricava:

$$y' = \frac{k}{x'}$$

che è l' equazione dell' iperbole prima considerata. I due asintoti $x' = 0$, $y' = 0$ sono corrisponednti agli asintoti $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$

Esempio La funzione omografica

$$y = \frac{x+4}{x-2}$$

ha per grafico un' iperbole equilatera di asintoti $x = 2, y = 1$ e centro $O'(2,1)$.

Infatti con la traslazione:

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$$

l' equazione diventa:

$$y' = \frac{6}{x'}$$

che è l' equazione dell' iperbole equilatera dell' esempio precedente. Rappresentando in una stessa tabella e in uno stesso grafico le due iperboli si ottiene:

x	-6	-4	-2	-1	0	1	3	4	6	8
y	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-5	7	4	$\frac{5}{2}$	2
x'	-6	-4	-2	-1	0	1	3	4	6	8
y'	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	-6	-	6	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$

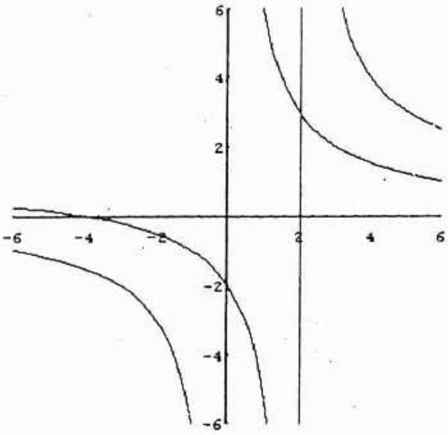

Figure 4.14: Grafico delle due iperboli