Chapter 8

Radici e funzione valore assoluto.

8.1 Radicali aritmetici.

Definizione Dato un numero reale non negativo a e un numero intero positivo n si chiama *radice ennesima aritmetica* del numero a quel numero reale non negativo la cui potenza ennesima è uguale ad a.

La radice ennesima di a si indica con il simbolo

$$\sqrt[n]{a}$$

che si chiama radicale aritmetico. Il numero a si chiama radicando, mentre il numero intero positivo n si chiama indice del radicale.

Se indichiamo con b il numero positivo o nullo rappresentato dal simbolo $\sqrt[n]{a}$, cioè se poniamo:

$$b = \sqrt[n]{a}$$

per definizione di radice ennesima si ha:

$$b^n = a$$

ossia, sostituendo a b il suo valore:

$$({}^{n}\sqrt{a})^{n} = a$$

cioè: **l' ennesima potenza della radice ennesima aritmetica di un numero reale non negativo è uguale al numero stesso.**

Valgono le seguenti proprietà:

1°) se $n > 0, {}^{n}\sqrt{0} = 0$ poichè $0^{n} = 0$

2°) se $n = 2$, invece di ${}^{2}\sqrt{a}$ si scrive $\sqrt{a}$ e si legge radice quadrata di a

3°) se $n = 3$, il simbolo ${}^{3}\sqrt{a}$ si legge radice cubica di a

4°) se $n = 1$, risulta ${}^{1}\sqrt{a} = a$

5°) al simbolo ${}^{0}\sqrt{a}$ non si attribuisce alcun significato

6°) in un radicale , il radicando può essere una potenza di un numero reale, come per esempio nel radicale:

$${}^{n}\sqrt{a^{m}}$$

il numero m esponente di tale potenza si chiama esponente del radicando.

S' intende che nel radicale:

$${}^{n}\sqrt{a}$$

l' esponente del radicando vale 1.

7°) Si osservi che se a è un numero reale positivo anche la radice ennesima aritmetica di a è un numero reale positivo, mentre se $a = 0$ è pure ${}^{n}\sqrt{a} = 0$ (si dovrà quindi sempre intendere, nel seguito, che i radicali rappresentano numeri reali positivi o nulli.

8.2 Proprietà invariantiva dei radicali aritmetici.

Vale il seguente:

Teorema 8.2 Il valore di un radicale aritmetico non cambia se il suo indice e l' esponente del suo radicando vengono moltiplicati per uno stesso numero positivo.

Vale cioè l' eguaglianza:

$${}^{n}\sqrt{a} = {}^{np}\sqrt{a^{p}}$$

Esempi Si ha:

$$\sqrt{7} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt[4]{49}$$
$$\sqrt{\tfrac{2}{5}} = \sqrt[6]{\left(\tfrac{2}{5}\right)^3} = \sqrt[6]{\tfrac{8}{125}}$$
$$\sqrt[5]{a} = \sqrt[10]{a^2}$$

8.3 Operazioni con i radicali

8.3.1 Prodotto di due o più radicali.

Vale il seguente

Teorema 8.3.1 Il prodotto di due o più radicali dello stesso indice è uguale a un radicale avente lo stesso indice dei radicali dati e per radicando il prodotto dei singoli radicandi.

In altri termini se a, b, c sono tre numeri reali non negativi e n un numero intero positivo, si ha:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c}$$

Osservazione Quando si vuole fare il prodotto dei radicali aventi indici diseguali, prima si riducono allo stesso indice e poi si applica il teorema 8.3.1.

Esempi Si osservino le seguenti applicazioni

$$\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{7} = \sqrt[5]{14}$$
$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{60} = \sqrt{900} = 30$$
$$\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt{b} = \sqrt[6]{(a^2b)^2} \cdot \sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{a^4b^2} \cdot \sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{a^4b^5}$$
$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a^8} \cdot \sqrt[12]{a^{10}} \cdot \sqrt[12]{a^3} = \sqrt[12]{a^{21}} = \sqrt[4]{a^7}$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt[2n]{a^2} \cdot \sqrt[2n]{b^n} = \sqrt[2n]{a^2b^n}$$

8.3.2 Quoziente di due radicali

Vale il seguente

Teorema 8.3.2 Il quoziente di due radicali aventi lo stesso indice, dei quali il secondo abbia il radicando diverso fa zero, è uguale ad un radicale avente lo stesso indice dei radicali dati e per radicando il quoziente dei radicandi di questi.

Cioè:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Osservazione Quando si voglia fare il quoziente di radicali aventi indici diseguali, prima si riducono allo stesso indice e poi si applica il teorema 8.3.2.

Esempi Si osservino le seguenti applicazioni

$$\frac{\sqrt[5]{a^9}}{\sqrt[5]{a^7}} = \sqrt[5]{\frac{a^9}{a^7}} = \sqrt[5]{a^2}$$
$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a+b}} = \sqrt{a-b}$$
$$\frac{\sqrt[4]{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}} = \frac{\sqrt[4]{a^2-b^2}}{\sqrt[4]{(a+b)^2}} = \sqrt[4]{\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}} = \sqrt[4]{\frac{a-b}{a+b}}$$

8.3.3 Potenza con esponente intero non negativo di un radicale.

Vale il seguente

Teorema La potenza p^{ma} di un radicale, con p numero intero non negativo, è uguale ad un radicale avente lo stesso indice del radicale dato e per radicando la potenza p^{ma} del radicando dato.

Cioè:

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

Esempio Si osservi la seguente applicazione

$$\left(\sqrt[6]{a+b}\right)^2 = \sqrt[6]{(a+b)^2} = \sqrt[3]{a+b}$$

8.3.4 Successive estrazioni di radici.

Vale il seguente

Teorema La radice *m_esima* della radice *n_esima* aritmentica di un numero reale non negativa a , è uguale alla radice aritmetica di indice mn del numero a, cioè:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Esempio Si osservi la seguente applicazione

$\sqrt[5]{\sqrt{a^5}} = \sqrt[10]{a^5} = \sqrt{a}$

8.3.5 Radicali simili. Somma algebrica di radicali.

Il teorema 8.3.1 e il teorema 8.3.2 permettono di esprimere il prodotto e il quoziente di radicali a mezzo di un solo radicale.

Non esistono però teoremi analoghi per l' addizione e la sottrazione di radicali, o di numeri e radicali. In altra parole vale la seguente

Osservazione In generale, la somma algebrica di due o più radicali non si può esprimere con un solo radicale.

Così ad esempio, per indicare la somma di $\sqrt{a}$ e di $\sqrt{b}$ si deve semplicemente scrivere:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Perciò, **e lo studente lo deve ben ricordare**, in genarale:
$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ **non** è uguale a $\sqrt[n]{a+b}$
$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ **non** è uguale a $\sqrt[n]{a-b}$

Dunque , dalla somma e differenza di due radicali $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ non è possibile, salvo casi particolarissimi, avere un' espressione più semplice di quella che si ha scrivendo:
$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ e $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$

Per comprendere in quali casi particolari si può semplificare la espressione della loro somma o differenza, premettiamo la seguente:

Definizione Due o più radicali irriducibili si dicono simili, quando hanno lo stesso indice, lo stesso radicando e differiscono, eventualmente, solo per il fattore che li moltiplica, che viene detto coefficiente del radicale.

Ad esempio :

$$\sqrt[3]{a^2b}, \qquad -7\sqrt[3]{a^2b}, \qquad \frac{28}{3}\sqrt[3]{a^2b}$$

sono radicali simili.

In questo caso le sottrazioni e le addizioni possono essere eseguite con quelle stesse regole con cui si esegue la riduzione dei monomi simili in un polinomio:

Osservazione La somma algebrica di due o più radicali simili è un radicale , simile ai dati, avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Esempi Si osservino bene le seguenti applicazioni:

$$\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$
$$5\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}=6\sqrt[3]{2}$$
$$\sqrt{8}+\sqrt{32}+\sqrt{128}=\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{2^4\cdot 2}+\sqrt{2^6\cdot 2}=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}+8\sqrt{2}=14\sqrt{2}$$
$$\sqrt[5]{a^6b}-\sqrt[5]{a^{11}b}+3\sqrt[5]{a^{16}b^6}=\sqrt[5]{a^5ab}-\sqrt[5]{a^{10}ab}+3\sqrt[5]{a^{15}b^5ab}=$$
$$a\sqrt[5]{ab}-a^2\sqrt[5]{ab}+3a^3b\sqrt[5]{ab}=a\sqrt[5]{ab}\,(1-a+3a^2b)$$

8.3.6 Razionalizzazione del denominatore di una frazione.

Quando nel denominatore di una frazione compaiono dei radicali, è opportuno trasformare sempre la frazione in un' altra equivalente il cui denominatore non contenga più radicali.

Questa operazione detta **razionalizzazione del denominatore di una frazione**, si effettua moltiplicando opportunamente, sia il numeratore che il denominatore della frazione, per un fattore, diverso da zero, detto **fattore razionalizzante.**

Vediamo come si sceglie questo fattore nei casi più comuni.

1° Caso. La frazione abbia al denominatore un radicale quadratico irriducibile, cioè la frazione sia della forma:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}$$

In questo caso il fattore razionalizzante è: $\sqrt{b}$. Infatti:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Esempi Valgono i seguenti passaggi:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(5+\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}+3}{3}$$

2° **Caso.** La frazione abbia al denominatore la somma lagebrica di due radicali quadratici, cioè la frazione sia della forma:

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

In tal caso, ricordando che $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$, si vede che il fattore razionalizzante è:
- $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ se al denominatore figura la somma,
- $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ se al denominatore figura la differenza

Esempio Valgono i seguenti passaggi:

$$\frac{5}{\sqrt{10}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)} = \frac{5\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)}{10-5} = \sqrt{10}-\sqrt{5}$$

8.4 Potenze con esponente razionale

8.4.1 Potenza con esponente razionale di un numero reale.

La potenza di un numero reale qualunque a è stata finora definita nel caso dell' esponente intero e positivo e, per $a \neq 0$, anche nel caso dell' esponente nullo e intero negativo.

Vogliamo ora far vedere come le proprietà stabilite per i radicali conducano, nel modo più naturale, a estendere il concetto di potenza di un numero reale al caso dell' esponente razionale (o frazionario).

Dobbiamo però dire subito, in modo esplicito, che per poter fare questa estensione dobbiamo imporre una restrizione, che si deve tenere sempre presente. Precisamente: *I numeri che si adottano come base si devono sempre supporre non negativi.*

Per vedere come si possa raggiungere detta estensione, osserviamo innanzi tutto che possiamo scrivere (per il teorema 8.2) :

$$\sqrt[3]{a^6} = a^2 \qquad \text{ossia} \qquad \sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}}$$

Analogamente si può scrivere:

$$\sqrt[4]{a^{20}} = a^{\frac{20}{4}}, \qquad \sqrt[7]{a^{21}} = a^{\frac{21}{7}}$$

e ciò perchè $\frac{20}{4} = 5, \frac{21}{7} = 3$, e le potenze con esponente intero sono già state definite.

Questa riduzione del radicale a una potenza non è più possibile quando l' esponente del radicando non è divisibile esattamente per l' indice della radice, come, ad es., nel caso di:

$$\sqrt[3]{a^5}$$

Se vogliamo, anche in questo caso, esprimere il radicale mediante una potenza, in modo analogo ai casi precedenti, si deve porre, per definiziione:

$$a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5}$$

Si conviene dunque di dare le seguenti:

Definizione Si chiama potenza con esponente razionale positivo $\frac{m}{n}$ di un numero reale non negativo a, quel radicale che ha come indice il denominatore n della frazione esponente e come radicando il numero a elevato alla potenmza di esponente eguale al numeratore m della frazione; cioè:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si definiscono poi le potenze con esponente razionale negativo di un numero reale positivo a ponendo:

Definizione Se a è un numero reale positivo, ed è $\frac{m}{n} > 0$, si pone:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$$

Non si definiscono le potenze con esponente razionale dei numeri negativi e le potenze dello zero con esponente razionale negativo, o nullo.

In base alle definizioni date, ogni potenza a base positiva ed esponente razionale è equivalente ad un radicale e viceversa.

Esempi Valgono i seguenti passaggi:

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
$7^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{7^3}$
$a^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{a^2}$
$(a+b)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(a+b)^3}$
$2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
$\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\left(\frac{3}{4}\right)^3}}$
$\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt{2a-b} = (2a-b)^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$
$\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{5}}} = a^{-\frac{2}{5}}$

8.4.2 Proprietà delle potenze con esponente razionale.

L' importanza della definizione data di potenza con esponente razionale è dovuta soprattutto al fatto che anche per queste potenze valgono tutti i teoremi dimostrati per le potenze con esponente intero, positivo o negativo. Precisamente si hanno i seguenti teoremi:

1°) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
2°) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$
3°) $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$
4°) $(a \cdot b \cdot c)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \cdot c^{\frac{m}{n}}$
5°) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

8.5 Valore assoluto

8.5.1 Definizione e proprietà.

La funzione valore assoluto si definisce come segue

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ viene detta valore assoluto di x ed ha le seguenti proprietà:
a) $|x| \geq 0$,
b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
c) $|-x| = |x|$,
d) $|x+y| \leq |x| + |y|$,
e) $||x| - |y|| \leq |x-y|$,
f) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
g) $|\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|}$,
h) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$,
i) $|x| \geq a \Leftrightarrow \{x \leq -a\} \cup \{x \geq a\}$

Le prime tre proprietà sono banali conseguenze della definizione, la d) si dice disuguaglianza triangolare del valore assoluto.

8.5.2 Disequazioni con il valore assoluto.

Se con $C(x)$ indichiamo un polinomio nella variabile x, oppure il quoziente di due polinomi, e con a un numero positivo, la disequazione:

$$|C(x)| < a \tag{8.1}$$

sarà soddisfatta per quei valori della x , se esistono, cha fanno assumere a $C(x)$ valori simultaneamente minori del numero a e maggiori del numero $-a$.

In altre parole la disequazione (8.1) è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} C(x) < a \\ C(x) > -a \end{cases}$$

che si può anche scrivere:

$$-a < C(x) < a$$

Invece la disequazione:

$$|C(x)| > a \tag{8.2}$$

è equivalente alle due seguenti disequazioni:

$$C(x) > a \qquad \text{e} \qquad C(x) < -a$$

Esempio Risolvere la disequazione:

$$\left|\frac{2x-5}{x+1}\right| > 1$$

Essa è equivalente alle due seguenti disequazioni:

$$\frac{2x-5}{x+1} > 1\,, \qquad \frac{2x-5}{x+1} < -1$$

ossia alle:

$$\frac{x-6}{x+1} > 0, \qquad \frac{3x-4}{x+1} < 0$$

La prima è soddisfatta per:

$$x < -1 \qquad \textit{e per} \qquad x > 6,$$

la seconda per:

$$-1 < x < \frac{4}{3}$$

e perciò la disequazione assegnata è soddisfatta per:

$$x < -1; \ -1 < x < \frac{4}{3}; \ x > 6$$

Esempio Risolvere l' equazione:

$$|x^2 - x - 6| = x + 2$$

Dobbiamo distinguere due casi:
1° caso: Sia $x^2 - x - 6 \geq 0$, cioè: $x \geq 3, x \leq -1$.
In questo caso l' equazione data diventa:

$$x^2 - x - 6 = x + 2, \qquad \text{cioè} \qquad x^2 - x - 8 = 0$$

le cui soluzioni sono:
$x_1 = 4$ e $x_2 = -2$, entrambe accettabili perchè soddisfano la condizione: $x^2 - x - 6 \geq 0$.
2° caso: Sia $x^2 - x - 6 < 0$, cioè: $-1 < x < 3$.
In questo caso l' equazione data diventa:

$$-x^2 + x + 6 = x + 2, \qquad \text{cioè} \qquad x^2 - 4 = 0$$

le cui soluzioni sono:
$x_1 = 2$ e $x_2 = -2$, e soltanto $x_1 = 2$ è accettabile perchè soddisfa la condizione: $-1 < x < 0$

Esempio Risolvere la disequazione:

$$|x^2 - 9x + 7| < 7$$

Tale disequazione è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 7 < 7 \\ x^2 - 9x + 7 > -7 \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} x^2 - 9x < 0 \\ x^2 - 9x + 14 > 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova che essso è soddisfatto per:

$$0 < x < 2$$

e per

$$7 < x < 9$$

Esempio Risolvere l' equazione:

$$|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geq 0$$

Dobbiamo distinguere due casi:
1° caso: Sia $x^2 + 3x \geq 0$, cioè: $x \leq -3, x \geq 0$.
In questo caso l' equazione data diventa:

$$x^2 + 3x + x^2 - 2 \geq 0, \qquad \text{cioè} \qquad 2x^2 + 3x - 2 \geq 0$$

le cui soluzioni sono:

$$x \geq \frac{1}{2} \qquad e \qquad x \leq -2.$$

Dobbiamo scegliere tra queste soluzioni quelle che soddisfano anche le condizioni di questo primo caso, cioè $x \leq -3; x \geq 0$. Pertanto le soluzioni della disequazione sono:

$$x \leq -3$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

2° caso: Sia $x^2 + 3x < 0$, cioè: $-3 < x < 0$.
In questo caso l' equazione data diventa:

$$-x^2 - 3x + x^2 - 2 \geq 0 \qquad \text{cioè} \qquad 3x + 2 \leq 0$$

che è soddisfatta per $x \leq \frac{3}{2}$. Tra queste soluzioni dobbiamo prendere solo quelle che soddisfano anche le condizioni di questo secondo caso. Si ha così, che le soluzioni cercate sono:

$$-3 < x \leq -\frac{2}{3}.$$

In conclusione le soluzioni della disequazione data sono:

$$x \leq -\frac{2}{3}; \; x \geq \frac{1}{2}.$$

8.5.3 Esercizi di riepilogo.

Risolvere la disequazione

$\left|\frac{x^2}{x-3}\right| < \frac{1}{2}$ $\quad]-\frac{3}{2}, 1[\cup [3, +\infty[$

Risolvere la disequazione

$|2x-5| > 15$ $\quad]-\infty, 5[\cup [10, +\infty[$

Calcolare il valore delle seguenti espessioni

$\sqrt{(81.000)^3 \cdot (250)^4 \cdot 10}$ $\quad [9^3 \cdot 5^4 \cdot 10^7]$

$\sqrt{0,0225 \cdot 0,0256}$ $\quad [0,024]$

$\sqrt[3]{2^3 \cdot 100 + 10^9 + 3^2 \cdot 10^{18}}$ $\quad [3 \cdot 10^6]$