

Compito Parziale di Algebra lineare e Geometria analitica

- 1) Dire se il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$H = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

è o non un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e eventualmente calcolarne la dimensione e una base.

- 2) Dato l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ così definito

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (2, 1, 1) \\ f(0, 1, 0) &= (0, 2, 0) \\ f(0, 0, 1) &= (-2, -3, -1) \end{aligned}$$

- a) calcolare dimensione, trovare una base e le equazioni cartesiane di $\ker f$
- Im f ,
- b) calcolare gli autovalori e gli autovettori,
- c) stabilire se f è diagonalizzabile o no.

- 3) Nel fascio di piani che ha per asse la retta che passa per i punti $P = (1, 1, 1)$ e $Q = (1, 2, -1)$, determinare quello perpendicolare al piano di equazione

$$y = z.$$

- 4) Determinare la posizione reciproca dei due piani α e β e calcolarne la distanza

$$\begin{aligned} \alpha : \quad x + y - 2z - 1 &= 0 \\ \beta : \quad 3x + 3y - 6z - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Soluzioni

- 1) H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 1, è una retta per O e una base è $(1, -4, 5)$.

- 2) La matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il rango di A è 2 quindi $\dim \operatorname{Im} f = 2$, una base di $\operatorname{Im} f$ è data dai vettori $(2, 1, 1)$ e $(0, 2, 0)$, la sua equazione cartesiana è $x - 2z = 0$, è un piano per O .
E $\dim \ker f = 1$, è una retta per O , le sue equazioni cartesiane sono $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$, una base è data dal vettore $(1, 1, 1)$. Gli autovalori sono: 0, 1, 2; $V_0 = \ker f$, V_1 è generato dal vettore $(2, 1, 1)$, V_2 è generato dal vettore $(0, 1, 0)$. L'endomorfismo

f è diagonalizzabile poiché lo è la sua matrice associata che ha 3 autovalori distinti.

3) La retta per P e Q ha equazioni cartesiane $\begin{cases} x = 1 \\ 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$, il fascio di piani ha equazione cartesiana $\alpha(x - 1) + \beta(2y + z - 3) = 0$, il piano richiesto ha equazione cartesiana $x = 1$.

4) I piani sono paralleli e distinti e la loro distanza è uguale a $\frac{|-1 + \frac{2}{3}|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{18}$.

Compito Parziale di Analisi

- 1) Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = (x+1)^2 \ln|x+1|.$$

- 2) Data $f(x) = e^x + x - \arctan x$,

i) verificare che f è iniettiva e suriettiva,

ii) calcolare la derivata di $f^{-1}(y)$ nel punto $y = f(0)$

- 3) Calcolare

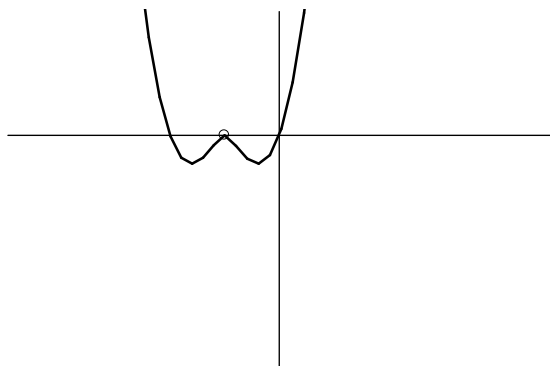
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\ln(2+x^2) - 2 \ln x - \frac{2}{x^2} \right] x^4 \right\}$$

Soluzioni

1) La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, con la traslazione $x' = x+1$, si ha $f(x') = x'^2 \ln|x'|$ che è una funzione pari. Quindi il grafico richiesto sarà simmetrico rispetto alla retta $x = -1$. Si studia f per $x > -1$. Risulta $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$, non ci sono asintoti,

$$f'(x) = (x+1)[2 \ln(x+1) + 1] \quad f''(x) = 2 \ln(x+1) + 3$$

c'è un punto di minimo in $x = e^{-\frac{1}{2}} - 1$ e un punto di flesso in $x = e^{-\frac{3}{2}} - 1$. Il suo grafico è il seguente:



2) La funzione è definita e continua in $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, quindi, per il teorema dei valori intermedi, è suriettiva e $f'(x) = e^x + \frac{x^2}{1+x^2} > 0$, quindi iniettiva. La funzione è invertibile in $\mathbb{R}$, e risulta

$$D[f^{-1}(y)]_{y=1} = \frac{1}{D[f(x)]_{x=0}} = 1.$$

3) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\ln(2 + x^2) - 2 \ln x - \frac{2}{x^2} \right] x^4 \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\ln \left(\frac{2 + x^2}{x^2} \right) - \frac{2}{x^2} \right] x^4 \right\}$$

con la sostituzione $\frac{1}{x^2} = t$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\ln \left(\frac{2 + x^2}{x^2} \right) - \frac{2}{x^2} \right] x^4 \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{[\ln(2t + 1) - 2t]}{t^2} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{2t - \frac{4}{2}t^2 + o(t^2) - 2t}{t^2} \right\} = -2.$$

Compito totale

- 1) Studiare la seguente funzione, disegnarne il grafico e determinare gli eventuali punti di non derivabilità

$$f(x) = \frac{x^2 + |x^2 - 4|}{x - 1}.$$

- 2) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin x + x^2)^{\frac{1}{x}}.$$

- 3) Dato l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) calcolare dimensione, trovare una base e le equazioni cartesiane di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$,
 - b) calcolare gli autovalori e gli autovettori,
 - c) stabilire se f è diagonalizzabile o no.
- 4) Calcolare la caratteristica della matrice al variare di k in $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1+k & 2 & -1 & 3 \\ 3+k & 4 & -3 & 5 \\ 5+k & 6 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Soluzioni

- 1) La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La retta $x = 1$ è un asintoto verticale perché $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-4}{x-1} & \text{per } |x| \geq 2 \\ \frac{4}{x-1} & \text{per } |x| < 2 \quad x \neq 1 \end{cases}$$

risulta $f(0) = -4$, $f(2) = 4$, $f(-2) = \frac{-4}{3}$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 2$, e $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 2$, quindi la retta $y = 2x + 2$ è l'asintoto obliquo.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-4x+4}{(x-1)^2} & \text{per } |x| > 2 \\ \frac{-4}{(x-1)^2} & \text{per } |x| < 2 \quad x \neq 1 \end{cases}.$$

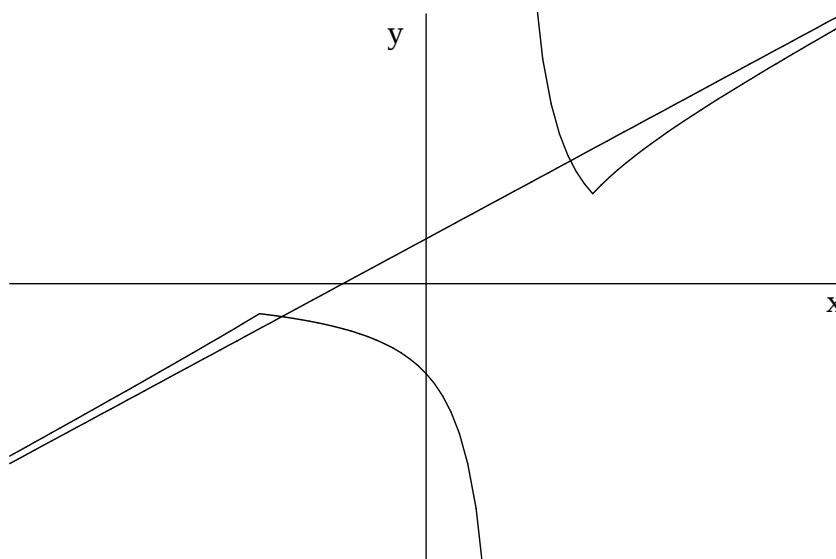
La funzione è non derivabile in $x = -2$ e in $x = 2$. Infatti per $x = -2$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = \frac{20}{9} \text{ e } \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = -\frac{4}{9}.$$

La funzione risulta strettamente crescente in $]-\infty, -2]$ e in $[2, +\infty[$ e strettamente decrescente in $[-2, 1[$ e in $]1, -2]$. La funzione ha un punto di massimo relativo in $x = -2$ e un punto di minimo relativo in $x = 2$.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-4}{(x-1)^3} & \text{per } |x| > 2 \\ \frac{8}{(x-1)^3} & \text{per } |x| < 2 \quad x \neq 1 \end{cases}$$

La funzione risulta convessa in $]-\infty, -2]$ e in $]1, 2]$ e concava in $[-2, 1[$ e in $[2, +\infty[$. Il suo grafico è il seguente:



2) Si ha

$$(1 + 2 \sin x + x^2)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1 + 2 \sin x + x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \sin x + x^2)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + 2x}{1 + 2 \sin x + x^2} = 2.$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin x + x^2)^{\frac{1}{x}} = e^2.$$

3) Il rango di A è 2, quindi $\dim \operatorname{Im} f = 2$, una base di $\operatorname{Im} f$ è data dai vettori $(1, 0, 0)$ e $(5, 3, 1)$, la sua equazione cartesiana è $y - 3z = 0$, cioè un piano passante per O . E $\dim \ker f = 1$, è una retta per O , le sue equazioni cartesiane sono

$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, una base è data dal vettore $(-2, 1, 0)$. Gli autovalori sono: $0, 1$ (doppio); $V_0 = \ker f$, V_1 è generato dal vettore $(1, 0, 0)$; f non è diagonalizzabile poiché la $\dim V_1 = 1$ e la molteplicità dell'autovalore 1 è 2 .

4)

$$\begin{pmatrix} 1+k & 2 & -1 & 3 \\ 3+k & 4 & -3 & 5 \\ 5+k & 6 & -5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3-A_1]{A_2-A_1} \begin{pmatrix} 1+k & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3-2A_2} \begin{pmatrix} 1+k & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

quindi la caratteristica della matrice è 2 per ogni valore reale.

Compito totale del 3/2/2009

- 1) Studiare la funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = \arcsin \frac{1}{1+x}$$

non è richiesto lo studio della derivata seconda.

- 2) Studiare la continuità nel punto $x = 1$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin|x-1|}{x-1} & x \in \mathbb{R} \setminus 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}.$$

- 3) Sia

$$f(x, y, z) = (2x + y, x - z)$$

determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ e determinare $\text{Im } f$ e $\ker f$.

- 4) Dopo aver determinato che i tre piani

$$\begin{aligned} \pi_1 &: x + 2y + z = 0 \\ \pi_2 &: y + z + 2 = 0 \\ \pi_3 &: x + 3y + 2z + 5 = 0 \end{aligned}$$

sono paralleli a una stessa retta passante per O determinare le equazioni di tale retta.