Il parziale di Istituzioni II di Algebra lineare e Geometria analitica viene fatto durante il corso, agli appelli viene fatto solamente il parziale di Analisi, chi non ha superato il parziale di algebra lineare e geometria porta quella parte all'orale.

Compito parziale di Geometria e Algebra lineare

1) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

determinare gli autovalori di A e una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale e costituita da autovettori di A.

2) Data la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$

$$q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 4xz + 8z^2$$

scrivere la matrice ad essa associata e provare che q è definita positiva.

3) Classificare la conica e determinarne l'equazione canonica

$$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$$

4) Scrivere l'equazione del cono di vertice l'origine e direttrice la curva Γ

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} .$$

5) Classificare la quadrica

$$2x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xz - 2x - 4z - 1 = 0.$$

Risposte: 1) Gli autovalori di A sono $\lambda = 0$ doppio e $\lambda = 9$. 2) Gli autovalori sono positivi. 3) Iperbole, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$. 4) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. 5) Iperboloide ad una falda.

Compito parziale di Geometria e Algebra lineare

1) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare gli autovalori di A e una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale e costituita da autovettori di A.

2) Classificare la conica e determinarne l'equazione canonica

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2y = 0.$$

3) Determinare le equazioni, il centro e il raggio della circonferenza che passa per i punti $(0,0,0)\,;(0,1,0)\,;(1,0,0)\,.$

4) Scrivere l'equazione del cilindro con le gerneratrici parallele all'asse y e direttrice la curva Γ

$$\Gamma : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \\ z = t \end{cases} .$$

5) Classificare la quadrica

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2x = 0.$$

Risposte: 1) Gli autovalori di A sono $\lambda = 0$ doppio e $\lambda = 3$. 2) Parabola, $y = \frac{2}{\sqrt{2}}x^2$. 3) $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - x - y = 0 \end{cases}$, il centro ha coordinate $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ e il raggio è $\sqrt{\frac{1}{2}}$. 4) $z^3 - x = 0$ 5) Paraboloide iperbolico.

Esercizi in preparazione del "parziale di analisi"

1) Sia f la seguente funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) studiare la continuità di f in $(0,0)$
b) calcolare, se esistono, le derivate direzionali di f in $(0,0)$
c) verificare che f non è differenziabile in $(0,0)$.

2) Sia f la seguente funzione

$$f(x,y)=|y-1|\,|x|+x$$

a) calcolare le derivate parziali di f nel punto $(0,1)$
b) verificare che f è differenziabile in $(0,1)$.

3) Sia f la seguente funzione

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

a) determinare l'insieme di esistenza di f, l'insieme dei punti in cui f è differenziabile,
b) determinare l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4) Calcolare la lunghezza dell'arco di parabola $y=x^2$ con $x\in[0,1]$.

Risposte
1) a) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{x^3}{x^2+y^2}=0$ poiché $\frac{x^3}{x^2+y^2}=x\frac{x^2}{x^2+y^2}$ e quindi $\frac{x^3}{x^2+y^2}$ è il prodotto della funzione limitata $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ per la funzione x che tende a zero per $(x,y)\longrightarrow(0,0)$.
b) Sia $v=(\alpha,\beta)\neq(0,0)$; $\lim\limits_{t\longrightarrow0}\frac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\longrightarrow0}\frac{t^3\alpha^3}{t^3(\alpha^2\beta^2)}=\frac{\alpha^3}{\alpha^2\beta^2}$. Se $v=(1,0)$ si ottiene $f_x(0,0)=1$, se $v=(0,1)$ si ottiene $f_y(0,0)=0$.
c) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{\frac{x^3}{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, tale limite non esiste come si vede ad esempio restringendo la funzione $\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ alle rette $y=mx$ (si ottengono limiti che variano al variare di m).
2) a) $f(x,1)=x$ $f_x(0,1)=1$, $f(0,y)=0$ $f_y(0,1)=0$.
b) $f(0,1)=0$,
$\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,1)}\frac{f(x,y)-f(0,1)-f_x(0,1)x-f_y(0,1)(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,1)}\frac{|y-1||x|+x-x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,1)}\frac{|y-1||x|}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$

poiché $\frac{|y-1||x|}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$ è prodotto di una funzione limitata per $|y-1|$ che tende a zero per $(x,y) \longrightarrow (0,1)$.

3) a) f è definita in $x^2+y^2 \leq 1$; $f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$; $f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, quindi per il teorema del differenziale totale, f è differenziabile in $x^2+y^2 < 1$.

b) Il piano tangente al grafico nel punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ha equazione $z = \frac{3}{\sqrt{3}} - x - y$.

4) L'arco $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ con $t \in [0,1]$ ha lunghezza $L = \int\limits_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt = 2\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}+t^2}dt$ con la sostituzione $t = \frac{1}{2}\sinh\tau$ si ottiene

$$L = \frac{1}{4}\left[\sinh\tau\cosh\tau + \tau\right]_{\tau_0}^{\tau_1} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right).$$

Compito parziale di analisi

1) Calcolare

$$\int\int_D e^{x+y}\,(x+1)^3\,dxdy$$

dove $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1 \quad -x\le y\le x+x^2\right\}.$

2) Calcolare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y)=\left(y-x^2\right)\left(y-x^2-1\right)$$

dove $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le x^2+1 \;\; y\le 2\right\}.$

Compito parziale di Analisi

1) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'+(\cos x)\,y=\sin x\cos x.$$

2) Calcolare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y)=2x+y+3$$

in $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+xy+y^2\le 1\right\}.$

Compito parziale di Analisi

1) Calcolare

$$\int\int_D \sqrt{4-x^2-y^2}\;x^2dxdy$$

dove $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1,\quad y\ge 0\right\}.$

2) Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\left\{\begin{array}{c} y''-2y'+5y=e^{2x} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{array}\right. .$$