CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

CENTRO DI ANALISI GLOBALE

Fabio Bardelli   Luisella Verdi

SULLE VARIETA' RAZIONALI NORMALI DI CODIMENSIONE 2 E GRADO 3 IN $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ COME INTERSEZIONI COMPLETE INSIEMISTICHE.

FIRENZE

Fabio Bardelli   Luisella Verdi

SULLE VARIETA' RAZIONALI NORMALI DI CODIMENSIONE 2 E GRADO 3 IN $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ COME INTERSEZIONI COMPLETE INSIEMISTICHE.

Istituto Matematico "Ulisse Dini"- Firenze

Ottobre 1979

Summary - In this note for any rational normal variety of codimension 2 and degree 3 in $\mathbb{P}^n$ is decided if it is a set-theotetic complete intersection or not. In particular we study the image of the Segre embedding of $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ in $\mathbb{P}^5$ and we find that is not a set-theoretic complete intersection. Then we make some remarks about some rational normal varieties of codimension 3.

Introduzione

Nel no.1 si analizzano le superfici razionali normali di grado 3 in $\mathbb{P}^4$ e si trova che esse sono tutte intersezioni complete insiemistiche. Il no.2 tratta delle varietà razionali normali di dimensione 3 e grado 3 in $\mathbb{P}^5$: si conclude che esse sono tutte intersezioni complete insiemistiche ad eccezione dell'immagine S dell'immersione di Segre di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ in $\mathbb{P}^5$ che, in base al Cor.2.3., non può esserlo. I risultati ottenuti vengono successivamente estesi alle varietà razionali normali di codimensione 2 e grado 3 in $\mathbb{P}^n$ $n > 5$.

Seguono alcune considerazioni sulla superficie di Veronese in $\mathbb{P}^5$ e su una rigata razionale normale di $\mathbb{P}^5$.

1. Le superfici razionali normali di grado 3 in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$.

Secondo il Bertini ([2]) l'ideale I di una qualunque superficie razionale normale V_2^3 di $\mathbb{P}^4$ è generato dai minori di ordine 2 della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

dalla quale sia stata tolta una colonna.

Si hanno dunque 4 casi possibili, ma si riconosce che con facili permutazioni delle coordinate ci si può ricondurre ai seguenti due casi proiettivamente distinti:

i) $I_1 = \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} \right)$

Questo ideale definisce il cono che proietta dal punto $(1;0;0;0;0)$ la cubica gobba contenuta nell'iperpiano $x_0 = 0$.

Allora l'ideale

$$J_1 = \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

verifica $I_1^2 \subseteq J_1$ ([6]) ed in particolare $\sqrt{J_1} = I_1$, quindi la superficie $V(I_1)$ è intersezione completa insiemistica dei due generatori di J_1.

ii) $I_2 = \left(\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_0 & x_3 \\ x_1 & x_4 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} \right)$

Posto $P = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix}$ e $Q = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_0 \\ x_3 & x_4 & x_1 \\ x_0 & x_1 & 0 \end{vmatrix}$,

si consideri l'ideale $J_2 = (P , Q)$. Si ha :

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix}^2 = -x_2 Q - x_0^2 P$$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_3 \\ x_1 & x_4 \end{vmatrix}^2 = -x_4 Q - x_1^2 P$$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 & x_3 \\ x_1 & x_4 \end{vmatrix} = -x_3 Q - x_0 x_1 P .$$

Ciò mostra che $I_2^2 \subset J_2$ ed in particolare $\sqrt{J_2} = I_2$, quindi la superficie $V(I_2)$ è intersezione completa insiemistica dei due generatori di J_2. Tale risultato è stato generalizzato in ([5]).

Si ha pertanto la seguente

<u>Prop.1.1. Le superfici razionali normali di grado 3 in $\mathbb{P}^4$</u>

sono intersezioni complete insiemistiche.

2. Le varietà razionali normali di dimensione 3 e grado 3 in $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$.

Secondo il Bertini ([2]) ed il Bellatalla ([1]) l'ideale I di una qualunque varietà razionale normale di dimensione 3 e grado 3 V_3^3 di $\mathbb{P}^5$ è generato dai minori di ordine 2 della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

dalla quale siano state tolte 2 colonne.

Si hanno a priori $\binom{5}{2} = 10$ casi possibili, ma si riconosce che con facili permutazioni delle coordinate ci si può ricondurre ai seguenti tre casi proiettivamente distinti :

i) $I_1 = \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} \right)$.

Si tratta questo ideale come quello esaminato nel caso i) del no.1 .

ii) $I_2 = \left(\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_0 & x_3 \\ x_1 & x_4 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} \right)$.

Si tratta questo ideale come quello esaminato nel caso ii) del no.1 .

iii) $I_3 = \left(\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_0 & x_4 \\ x_1 & x_5 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ x_3 & x_5 \end{vmatrix} \right)$.

La V_3^3 che ha per ideale I_3 è l'immagine S dell'immersione di Segre di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ in $\mathbb{P}^5$. Vogliamo provare che S non è intersezione completa come insieme in $\mathbb{P}^5$. A questo scopo richiamiamo la seguente

Def.2.1. Sia X una varietà algebrica. Si definisce dimensione coomologica di X, e si indica cd(X), il più piccolo intero $n \geq 0$ tale che $H^i(X,F) = 0$ per ogni $i > n$ e per ogni fascio coerente F su X.

Sussiste il seguente

Teorema 2.2. Sia Z una varietà completa di dimensione n su $\mathbb{C}$, X una sottovarietà chiusa e supponiamo $Z \setminus X$ liscia. Sia r un intero, se $cd(Z \setminus X) < r$ allora l'applicazione naturale

$$H^i(Z^h, \mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X^h, \mathbb{C})$$

è un isomorfismo $\forall$ $i < n-r$, ed è iniettiva per $i = n-r$.

Dim. cfr. ([3]) pag.148.

Corollario 2.3. L'immagine S dell'immersione di Segre di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ in $\mathbb{P}^5$ non è intersezione completa come insieme.

<u>Dim.</u> Ragioniamo per assurdo: se S fosse intersezione completa insiemistica di due ipersuperfici di $\mathbb{P}^5$, allora $\mathbb{P}^5 \setminus S$ sarebbe ricoperto da due aperti affini e quindi $cd(\mathbb{P}^5 \setminus S) < 2$. Dal teorema 2.2. si avrebbe allora un isomorfismo $H^2(\mathbb{P}^5_h, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(S^h, \mathbb{C})$. Ma S è isomorfa a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ e dunque dalla formula di Künneth segue $H^2(S^h, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, mentre $H^2(\mathbb{P}^5_h, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$.

A conclusione dell'esame delle V^3_3 razionali normali di $\mathbb{P}^5$ si ha la seguente

<u>Prop</u>.2.4. <u>Le</u> $V^3_3(I_1)$ <u>e</u> $V^3_3(I_2)$ <u>sono intersezioni complete come insieme, mentre la</u> $V^3_3(I_3)$ <u>non lo è</u> .

3. <u>Le varietà razionali normali di codimensione 2 e grado 3 in</u> $\mathbb{P}^n$ $n > 5$.

Nel già citato lavoro di Bellatalla ([1]) viene provato che l'ideale di una qualunque varietà razionale normale V^3_{n-2} di $\mathbb{P}^n$ è generato dai minori di ordine 2 della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \cdots\cdots x_i \cdots\cdots x_{n-1} \\ x_1 & x_2 \cdots\cdots x_{i+1} \cdots\cdots x_n \end{pmatrix}$$

dalla quale sono state tolte n-3 colonne.

Si hanno dunque $\binom{n}{n-3}$ casi possibili che, come ai ni.1 e 2, si riducono ai seguenti 3 casi proiettivamente distinti:

i) $I_1 = \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} \right)$

ii) $I_2 = \left(\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_0 & x_3 \\ x_1 & x_4 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} \right)$

iii) $I_3 = \left(\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_0 & x_4 \\ x_1 & x_5 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ x_3 & x_5 \end{vmatrix} \right)$.

E' immediato constatare, in conseguenza dei ni.1 e 2, che le varietà $V^3_{n-2}(I_2)$ sono intersezioni complete come insieme in $\mathbb{P}^n$, mentre la $V^3_{n-2}(I_3)$ non lo è.

4. Sulla superficie di Veronese in $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$.

Lo studio delle varietà razionali normali di codimensione 3 si è rivelato assai difficile. Si consideri ad esempio in $\mathbb{P}^5$ con le coordinate omogenee $(z_0, \ldots\ldots, z_5)$ la superficie V^4_2 di Veronese il cui ideale ($[2]$) è generato dai minori di ordine 2 dalla matrice

$$H = \begin{pmatrix} z_0 & \frac{z_1}{2} & \frac{z_2}{2} \\ \frac{z_1}{2} & z_3 & \frac{z_4}{2} \\ \frac{z_2}{2} & \frac{z_4}{2} & z_5 \end{pmatrix}$$

Si ha la seguente

<u>Prop</u>.5.1. $cd(\mathbb{P}^5 \setminus V_2^4) < 3$.

<u>Dim.</u> Poiché la V_2^4 è isomorfa a $\mathbb{P}^2$, le applicazioni di restrizione $H^i_{DR}(\mathbb{P}^5) \longrightarrow H^i_{DR}(V_2^4)$ $i = 0,1$ sono isomorfismi, e dunque per un noto teorema di Ogus ([4]) si ha che $cd(\mathbb{P}^5 \setminus V_2^4) < 3$.

Questa proposizione ci dice che non esistono ostruzioni sulla coomologia di $\mathbb{P}^5 \setminus V_2^4$ affinché la V_2^4 sia intersezione completa come insieme. D'altra parte vogliamo mostrare che la V_2^4 non è intersezione completa come insieme di 3 ipersuperfici di $\mathbb{P}^5$ se una di esse ha equazione $(\det H)^r = 0 \ \forall\, r > 0$.

Consideriamo il prodotto $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ con le coordinate $\{(x_0,x_1,x_2);(y_0,y_1,y_2)\}$ e l'applicazione "prodotto simmetrico" $\varphi : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$ definita da

$z_0 = x_0y_0$, $z_1 = x_0y_1 + x_1y_0$, $z_2 = x_0y_2 + x_2y_0$, $z_3 = x_1y_1$,

$z_4 = x_1y_2 + x_2y_1$, $z_5 = x_2y_2$.

Si ha $\varphi(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) = V(\det H)$ e, posto

$$\Delta = \left\{ (x_0,x_1,x_2;y_0,y_1,y_2) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \;\middle|\; rK\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} = 1 \right\},$$

risulta

$$\varphi(\Delta) = \left\{ (z_0,\dots\dots,z_5) \in \mathbb{P}^5 \;\middle|\; rK\, H = 1 \right\},$$

cioè $\varphi(\Delta)$ è la superficie di Veronese in $\mathbb{P}^5$.

Supponiamo $\varphi(\Delta)$ luogo di zeri comuni a due polinomi omogenei F, G e al polinomio $(\det H)^r$, $r > 0$. Allora Δ è luogo di zeri dei polinomi $\varphi^*(F)$, $\varphi^*(G)$, perché $\varphi^*(\det H)^r$ è identicamente nullo su $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Poiché $(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \setminus V(\varphi^*(F))$ e $(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \setminus V(\varphi^*(G))$ sono aperti affini di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ e costituiscono dunque un ricoprimento aciclico di $(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \setminus \Delta$, si ha $cd((\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \setminus \Delta) < 2$. Allora per il teorema 2.2. esiste una iniezione $H^2(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(\Delta^h, \mathbb{C})$. Ma $\Delta \cong \mathbb{P}^2$ e dunque $H^2(\Delta^h, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, mentre per la formula di Künneth $H^2(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Questi argomenti ci dicono che quindi fra i polinomi omogenei che potrebbero definire la V_2^4 di Veronese come intersezione completa insiemistica dobbiamo escludere proprio il polinomio più "naturale" : detH è le sue potenze.

Esistono d'altra parte superfici rigate razionali normali di grado 4 in $\mathbb{P}^5$ che sono intersezioni complete insiemistiche:

<u>Es.1-</u> Si consideri l'ideale I generato dai minori di ordine 2 dalla matrice
$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} .$$

V(I) è un cono sulla curva C_1^4 di $\mathbb{P}^4$ e dunque è intersezione completa come insieme ([6]).

<u>Es.2-</u> Si consideri l'ideale I generato dai minori di ordine 2 della matrice
$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_5 \end{pmatrix}$$

V(I) è una rigata razionale normale di grado 4 in $\mathbb{P}^5$, cfr. ([2]). Se

$$J = (x_0x_2-x_1^2\ ,\quad x_0x_3^2-2x_1x_2x_3+x_2^3\ ,\quad x_0x_5^3-3x_5^2x_1x_4+3x_2x_5x_4^2-x_3x_4^3),$$

si verifica che V(I) = V(J) e quindi V(I) è intersezione completa insiemistica.

BIBLIOGRAFIA

[1] A.Bellatalla - "Sulle varietà razionali normali composte di ∞^1 spazi lineari", in Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol.XXXVI 1901 pag.803.

[2] E.Bertini - "Geometria Proiettiva degli iperspazi", Ed. Principato Messina 1923.

[3] R.Hartshorne - "Ample Subvarieties of algebraic varieties", Lecture Notes in Math. 156 Springer Verlag 1970.

[4] A.Ogus - "Local cohomological dimension of algebraic varieties" in Annals of Mathematics vol.98 1973 pag.327.

[5] G.Valla - " On determinantal ideals which are set theoretic complete intersection " Rapporto dell'Istituto di Matematica di Genova Settembre 1979.

[6] L.Verdi - " Le curve razionali normali come intersezioni complete insiemistiche" Bollettino U.M.I. (5) 16-A (1979) 385-389 .