A Franca e Franco,
sempre vicini anche se troppo lontani...

Indice

Introduzione

Un tipico problema del Calcolo delle Variazioni è

$$\text{minimizzare } \left\{ F(u) := \int_a^b f(u(x), u'(x))\mathrm{d}x \right\}, \quad u \in \Omega, \qquad (P)$$

dove

$$\Omega := \{u \in W^{1,1}(a,b) \, : \, u(a) = \alpha, \, u(b) = \beta, \, u([a,b]) \subset I\},$$

con I intervallo reale, $\alpha, \beta \in I$.
Un tale tipo di funzionale F, in cui la funzione integranda f non dipende esplicitamente dalla variabile d'integrazione, si dice autonomo e molti sono i problemi classici che permettono una formulazione di questo tipo, basti pensare al principio di Fermat (traiettoria di un raggio luminoso), al problema di Newton (profilo di solido di rotazione che offre minor resistenza quando immerso in un fluido), al problema della brachistocrona (determinare il percorso congiungente due punti fissati in un piano verticale in modo che un punto materiale, soggetto alla sola forza di gravità, percorra il tragitto nel più breve tempo possibile). Tutti questi problemi non rientrano nella classe di problemi variazionali trattabili con il Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni, il quale permette di rispondere affermativamente sull'esistenza del minimo quando il funzionale è convesso e coercivo. Purtroppo quando una delle due proprietà viene a mancare l'esistenza del minimo non è garantita.

Per agevolare l'esposizione, introduciamo fin da subito due notazioni: f^{**} denota l'inviluppo convesso di f rispetto alla seconda variabile, vale a dire, fissato s, $f^{**}(s, \cdot)$ è la più grande funzione convessa in z che risulti minore o uguale a $f(s, \cdot)$; con (P^{**}) denotiamo il problema variazionale (P) avente f^{**} al posto di f. Inoltre, specifichiamo che quando diremo f convessa o f coerciva intenderemo rispettivamente che f è convessa nella seconda variabile e che esiste una funzione $\Phi = \Phi(z)$, tale che valgano le seguenti:

$$f(s,z) \geq \Phi(z), \ \forall \, (s,z); \qquad \lim_{|z| \to +\infty} \frac{\Phi(z)}{|z|} = +\infty. \qquad (0.0.1)$$

La risolubilità di (P) è stata molto studiata in questi anni; diverse classi di lagrangiane sono state considerate in letteratura da molti autori e in vari contesti. Tra i tanti articoli pubblicati ne ricordiamo alcuni, senza alcuna pretesa di esaustività. Per il caso di f coerciva ma non convessa ricordiamo [18], [23] e [13]. In particolare sottolineamo quest'ultimo, dove per f coerciva di tipo somma ($f(s,z) = g(s) + h(z)$) e sotto ipotesi molto deboli di regolarità si dimostra che se $f(s,0) = f^{**}(s,0)$ allora l'esistenza di minimo è garantita. Per quel che riguarda il caso in cui f non è coerciva, ma convessa, indichiamo [7] e [8]. Citiamo infine [2], [3], [4], [15] per il caso di funzionali non coercivi, non autonomi. Un risultato di esistenza di minimo per una classe non convessa e non coerciva di f è stata studiata in [6] e senza l'ipotesi $f(s,0) = f^{**}(s,0)$.

Nonostante l'intensa ricerca in questo campo, ancora molti punti restano da chiarire nei casi non coperti dal Metodo Diretto. In questa tesi, oltre a descrivere alcuni recenti risultati ottenuti da Marcelli in [16] (Capitolo 1) e da Cupini-Marcelli [11] e Cupini-Guidorzi-Marcelli [10] (Capitolo 2), si intendono dimostrare alcuni nuovi risultati, in assenza di coercività, in questi due ambiti:

- l'esistenza di minimo per il problema (P^{**}) (Capitolo 3),
- il rilassamento (Capitolo 4),

dove per risultato di rilassamento intendiamo quello in cui si afferma, sotto opportune ipotesi, che l'esistenza di minimo per (P^{**}) implica l'esistenza di un minimo per (P).

Lo strumento alla base della nostra indagine è lo studio delle proprietà di monotonia dei minimi di F (quando essi esistono) condotto in [11].
In tale articolo si dimostra che, sotto le assunzioni che $f(s,z)$ sia Borel-misurabile, $s \mapsto f(s,0)$ inferiormente continua e $f(s,0) = f^{**}(s,0)$, ma senza ipotesi di coercività, allora lo spazio di competizione Ω può essere ristretto alla sottoclasse Ω^* costituita da funzioni che sono costanti in un intervallo $[\tau_1, \tau_2] \subseteq [a,b]$ e strettamente monotone (e con derivata q.o. non nulla) in $[a, \tau_1]$ and in $[\tau_2, b]$. D'ora in poi ci riferemo a questo risultato come *risultato di bimonotonia*. Osserviamo che risultati ad esso correlati appaiono in [14] (sotto l'ipotesi $f(s,0) < f(s,z)$), [13] e [20] (entrambi per il caso somma) e infine in [22] per integrandi coercivi.

E' grazie al risultato di bimonotonia che dei risultati dimostrati in [16] per il problema vincolato (P^+) (con (P^+) intendiamo il problema (P) in cui $\alpha \leq \beta$ e lo spazio di competizione Ω è ridotto al sottoinsieme Ω^+ delle funzioni crescenti) sono potuti essere utilizzati in [10] per dedurre informazioni su

(P). E' da notare che, come è ovvio, i due problemi, (P^+) e (P), hanno caratteristiche diverse, tanto che possono avere uno soluzione e l'altro no.
Per illustrare questo fatto facciamo appello al problema classico delle superfici di rivoluzione di area minima; esso consiste nel determinare tra tutte le $u = u(x)$ aventi grafico congiungente due punti del piano (a, α) e (b, β), $\alpha, \beta \geq 0$, quella la cui rotazione intorno all'asse x determina la superficie con area minima.
Il funzionale da minimizzare è

$$F(u) = \int_a^b u(x)\sqrt{1 + u'^2(x)}dx$$

nella classe delle funzioni u la cui immagine appartiene a $I = [0, +\infty)$. Tale funzionale F risulta convesso, ma non coercivo. Dunque il Metodo Diretto non è applicabile e ciò che si dimostra è che l'esistenza del minimo in Ω dipende dalla posizione di (a, α) e (b, β): se $\alpha = 0 < \beta$ non esiste il minimo e se $\alpha > 0$ il minimo può esistere oppure no, a seconda della posizione di β (si veda ad esempio [24] per i dettagli). Invece, all'interno della classe di funzioni crescenti Ω^+ si dimostra che se $0 < \alpha$ allora F ha minimo qualunque sia $\beta \geq \alpha$, mentre se $\alpha = 0 < \beta$ non esiste minimo (v. Esempio 1 in [16]).
L'esempio delle superfici di rivoluzione di area minima suggerisce che, in generale, una condizione sufficiente per l'esistenza del minimo possa essere ottenuta in termini dei dati al bordo (a, α), (b, β). Una tale indagine è stata condotta, ad esempio, in [3] per un'opportuna classe di funzionali importante per le sue applicazioni all'ecologia e, per quel che riguarda specificatamente l'ambito della nostra tesi, da Marcelli [16, Sezione 5] per il problema (P^+).

Anche nel legame tra ottimalità e condizione di Du Bois-Reymond emerge una significativa differenza tra problema (P) e (P^+). E' ben noto, si veda ad esempio [5], che sotto ipotesi di regolarità per f, un minimo u di (P) soddisfa la condizione di Du Bois-Reymond, cioè

$$f(u(x), u'(x)) - u'(x)f_z(u(x), u'(x)) = \text{costante} \qquad \text{q.o. in } [a, b].$$

Nel caso di f non regolare, ma convessa, tale risultato è stato dimostrato essere ancora vero in [1]. Ovviamente, causa la possibile assenza di derivate parziali di f, l'equazione di Du Bois-Reymond nel caso non regolare va riscritta in termini di inclusione differenziale, utilizzando la nozione di sottodifferenziale, vale a dire

$$f(u(x), u'(x)) - c \in u'(x)\partial f(u(x), u'(x)) \qquad \text{q.o. in } [a, b]. \tag{DBR}$$

Tale risultato è stato poi dimostrato nel caso non convesso in [10], si veda anche [9]. Da notare che, anche nel caso di f non convessa in z il sottodifferenziale presente in (DBR) è quello nel senso dell'Analisi Convessa. Ora, mentre nel caso del problema vincolato (P^+) il soddisfare la condizione di Du Bois-Reymond è anche condizione sufficiente per l'ottimalità (si veda [16]), questo non è in generale vero per (P). Ad esempio, consideriamo

$$f(z) = |z|, \quad (a, b) = (-1, 2), \quad (\alpha, \beta) = (1, 2), \quad I = \mathbb{R}.$$

La funzione $u(x) = |x|$ soddisfa (DBR) con constante $c = 0$ ma non è un minimo, mentre lo sono tutte le funzioni assolutamente continue crescenti soddisfacenti le condizioni al bordo.

I legami esistenti tra risolubilità di (P^+) e la dipendenza dai dati al bordo e tra ottimalità di $u \in \Omega^+$ e condizione di Du Bois-Reymond, sono descritti nel Capitolo 1 di questa tesi. Essi sono stati utilizzati in [10] per dimostrare la risolubilità di (P). In particolare, si dimostra che, grazie al risultato di bimonotonia, la risolubilità di opportuni problemi vincolati $(P^\pm)$ implica la risolubilità di (P). Tale studio è descritto nel Capitolo 2.

I suddetti risultati vengono da noi utilizzati per dimostrare risultati di esistenza per (P) a partire dall'esistenza di funzioni soddisfacenti opportune condizioni di Du Bois-Reymond (Teorema 3.1.2) o dalla verifica di opportune disuguaglianze integrali (Teorema 3.1.3). Queste ultime disuguaglianze integrali sono parenti delle disuguaglianze che nel caso (P^+), studiato in [16], esprimevano come la posizione dei dati al bordo influisca sull'esistenza del minimo.

Infine, nel Capitolo 4 ci occupiamo del problema del rilassamento. I risultati della letteratura che stanno alla base del nostro risultato principale in questo capitolo (Teorema 4.4.1) sono: un teorema di rilassamento dimostrato in [6] (e che qui riportiamo, vedi Teorema 4.1.1), valido sotto una condizione di crescita che include alcuni casi di crescita lineare, e il teorema di rilassamento dimostrato in [16] (vedi Teorema 1.5.1), valido per il problema (P^+) e senza ipotesi di crescita. La via standard per dimostrare che esiste un minimo per (P), noto un minimo u di (P^{**}), è la seguente (vedi [19]): se vale quasi ovunque l'uguaglianza $f^{**}(u, u') = f(u, u')$, allora u è minimo anche di (P); altrimenti si cerca di modificarlo, definendo così un nuovo minimo v di (P^{**}) soddisfacente la cercata uguaglianza $f^{**}(v, v') = f(v, v')$.
L'idea che sta alla base del nostro risultato è la seguente: dal risultato di bimonotonia si sa che se (P^{**}) ammette soluzione, ne esiste una, sia essa u, che è strettamente monotona in $[a, \tau_1]$ e $[\tau_2, b]$ e con derivate diverse da zero q.o. in tali insiemi, mentre in $[\tau_1, \tau_2]$ è costante (ovviamente $a \le \tau_1 \le \tau_2 \le b$). La nostra idea è di utilizzare in $[a, \tau_1]$ e in $[\tau_2, b]$ il procedimento di modifica del minimo messo a punto in [11] e di utilizzare il procedimento di modifica messo a punto in [6] nel tratto costante corrispondente a $[\tau_1, \tau_2]$. Notiamo che in quest'ultimo intervallo vale che $(u(x), u'(x)) = (s_0, 0)$ per un fissato

s_0. Dunque, grazie a questa informazione a priori, la modifica di u, fatta usando la tecnica esposta in [6], richiederà meno ipotesi rispetto a quelle che sarebbero state necessarie per modificare una generica funzione u.

Capitolo 1

Il problema vincolato ($\mathbf{P}^+$)

Supponiamo che sia $\alpha \leq \beta$. Chiamiamo (P^+) il problema variazionale (P) ristretto alla classe di competizione Ω^+, dove

$$\Omega^+ := \left\{ v \in W^{1,1}(a,b) \, : \, v(a) = \alpha, v(b) = \beta, v'(t) \geq 0 \text{ q.o. in } (a,b) \right\}. \tag{1.0.1}$$

E' facile comprendere, dopo aver letto questo capitolo, che se $\alpha \geq \beta$ è possibile definire in modo simile il problema (P^-) e che per esso valgono analoghi risultati a quelli esposti in questa sezione per il problema (P^+).

In questo capitolo intendiamo esporre alcuni risultati dimostrati in [16].

Faremo la seguenti ipotesi:

- $f : [\alpha, \beta] \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ inferiormente semicontinua.

In particolare, f può essere non regolare, non convessa nella seconda variabile, non coerciva.

Introduciamo ora alcune notazioni.

Per ogni $v \in \Omega^+$ siano

$$\begin{aligned} A_v &:= \{t \in (a,b) \, : \, \text{esiste } v'(t) > 0\}, \\ B_v &:= \{t \in (a,b) \, : \, \text{esiste } v'(t) = 0\}. \end{aligned} \tag{1.0.2}$$

Si osservi che la assoluta continuità di v assicura che

$$|v(A_v)| = \beta - \alpha, \tag{1.0.3}$$

$$|E| = 0 \Leftrightarrow |v^{-1}(E) \cap A_v| = 0 \tag{1.0.4}$$

per ogni insieme misurabile $E \subseteq (\alpha, \beta)$.

Faremo uso della trasformazione $\sim$, la quale associa ad ogni funzione $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, la funzione $\widetilde{h} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $\widetilde{h}(z) = h(\frac{1}{z})z$. Le principali proprietà di questa trasformazione sono qui sotto elencate.

Lemma 1.0.1. *Per ogni $h : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ si ha*

(i) $\widetilde{\widetilde{h}} = h$*;*

(ii) $\widetilde{h}$ *è convessa in* (c,d) *se e solo se* h *è convessa in* $(\frac{1}{d}, \frac{1}{c})$*;*

(iii) $\widetilde{h}$ *è affine in* (c,d) *se e solo se* h *è affine in* $(\frac{1}{d}, \frac{1}{c})$*;*

(iv) $(\widetilde{h})^{**} = \widetilde{(h^{**})}$*;*

(v) $c \in \partial_+ \widetilde{h}(z) \Leftrightarrow z[h(\frac{1}{z}) - c] \in \partial_+ h(\frac{1}{z})$.

dove h^{**} *denota l'inviluppo convesso di* h *(rispetto alla famiglia di funzioni convesse definite in* $(0,+\infty)$ *e minori o uguali a* h*) e* $\partial_+ h$ *indica il sottodifferenziale di* h *nel senso dell'Analisi Convessa, vale a dire*

$$\partial_+ h(z_0) = \{c \in \mathbb{R} \,:\, h(z) - h(z_0) \geq c(z - z_0) \text{ per ogni } z > 0\}. \tag{1.0.5}$$

1.1 Un problema di Bolza equivalente a (P^+)

In questa sezione si vuole associare al nostro problema (P^+) un problema di Bolza a esso equivalente.
Sia definito

$$\widetilde{\Omega}^+ = \left\{u \in W^{1,1}(\alpha,\beta) \,:\, u(\alpha) = a, u(\beta) \leq b, u' > 0 \text{ q.o. in } (\alpha,\beta)\right\}$$

e si consideri ora la mappa $\chi^+ : \Omega^+ \to \widetilde{\Omega}^+$, definita da $v \mapsto \chi^+_v$, dove

$$\chi^+_v(\tau) = \chi^+(v(\tau)) := a + \int_\alpha^\tau (\omega^+_v)'(\sigma) \mathrm{d}\sigma \text{ con } \omega^+_v(\tau) := \min\{t \in [a,b] : v(t) = \tau\} \tag{1.1.1}$$

e la mappa $\Psi^+ : \widetilde{\Omega}^+ \to \Omega^+$ definita da $u \mapsto \Psi^+_u$, dove

$$\Psi^+_u(t) = \Psi^+(u(t)) := \begin{cases} u^{-1}(t) & \text{se } a \leq t \leq u(s_0) \\ s_0 & \text{se } u(s_0) \leq t \leq u(s_0) + b - u(\beta) \\ u^{-1}(t - b + u(\beta)) & \text{se } u(s_0) + b - u(\beta) \leq t \leq b \end{cases} \tag{1.1.2}$$

in cui si è preso $s_0 \in \{\tau \in [\alpha,\beta] \,:\, f(\tau,0) = \min_{s\in[\alpha,\beta]} f(s,0)\}$.
Vediamo alcune proprietà di queste mappe.

Lemma 1.1.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

(*i*) *se* $v \in \Omega^+$, *allora*

$$\omega_v \text{ è continua in } \tau_0 \quad \Leftrightarrow \quad v^{-1}(\tau_0) \text{è composto da un singolo elemento;}$$

(*ii*) *se* $v \in \Omega^+$ *ed esiste* $v'(t_0)$ *con* $v'(t_0) > 0$ *allora esiste anche* $\omega_v'(v(t_0)) = \frac{1}{v'(t_0)}$;

(*iii*) *le mappe* χ^+ *e* Ψ^+ *sono ben definite;*

(*iv*) *se* $v \in \Omega^+$ *allora*

$$|A_v| = \chi_v^+(\beta) - a \quad \text{e} \quad |B_v| = b - \chi_v^+(\beta).$$

In particolare,

$$\chi_v^+(\beta) = b \quad \Leftrightarrow \quad v'(t) > 0 \text{ per q.o. } t \in [a, b];$$

(*v*) χ^+ *è suriettiva. Più precisamente, per ogni* $u \in \widetilde{\Omega}^+$ *si ha* $\chi^+(\Psi^+(u)) = u$.

Si osservi che χ^+ non è iniettiva.

Si consideri ora il funzionale $\widetilde{F} : \widetilde{\Omega}^+ \to [0, +\infty]$,

$$\widetilde{F}(u) := \int_\alpha^\beta f(\tau, \frac{1}{u'(\tau)})u'(\tau)\mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta))\,, \tag{1.1.3}$$

dove

$$\mu = \min_{s\in[\alpha,\beta]} f(s, 0) = f(s_0, 0) \qquad \text{con} \;\; s_0 \in [\alpha, \beta]. \tag{1.1.4}$$

Abbiamo il seguente

Lemma 1.1.2. *Per ogni* $v \in \Omega^+$

$$F(\Psi^+(\chi^+(v))) = \widetilde{F}(\chi^+(v)) \le F(v). \tag{1.1.5}$$

Vale l'uguale se e solo se $f(v(t), 0) = \mu$ *per q.o.* $t \in (a, b)$ *tale che* $v'(t) = 0$.

Consideriamo ora il problema di Bolza

$$\text{minimizzare } \left\{\int_\alpha^\beta \widetilde{f}(\tau, u'(\tau))\mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta))\right\}, u \in \widetilde{\Omega}^+ \tag{$\widetilde{P}^+$}$$

dove $\widetilde{f} : [\alpha, \beta] \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è definita da

$$\widetilde{f}(\tau, z) = f(\tau, \frac{1}{z})z. \tag{1.1.6}$$

Dunque, $\widetilde{f}(\tau, \cdot)$ è la trasformata di $f(\tau, \cdot)$ mediante l'operatore $\sim$ introdotto a inizio sezione.

Il problema ($\widetilde{P}^+$) appena definito è equivalente a (P^+) nel senso seguente.

Teorema 1.1.3. *Se $v \in \Omega^+$ è un minimo per il problema (P^+), allora χ_v^+ è un minimo per $(\widetilde{P}^+)$. Viceversa, se $u \in \widetilde{\Omega}^+$ è un minimo per $(\widetilde{P}^+)$, allora Ψ_u^+ è un minimo per (P^+).*

Dimostrazione. Sia v un minimo del problema (P^+). Dal Lemma 1.1.2 si ottiene che $\Psi^+(\chi^+(v))$ è anch'esso un minimo per (P^+). Da (v) in Lemma 1.1.1 si ha che la mappa χ^+ è suriettiva e, riutilizzando il Lemma 1.1.2 con questa nuova informazione, si ottiene che per ogni $u \in \widetilde{\Omega}^+$

$$\widetilde{F}(u) = F(\Psi^+(u)) \geq F(\Psi^+(\chi^+(v))) = \widetilde{F}(\chi^+(v)).$$

Ciò dimostra che $\chi^+(v)$ è un minimo per $(\widetilde{P}^+)$.
Viceversa, se u è un minimo per $(\widetilde{P}^+)$, allora per ogni $v \in \Omega^+$, grazie al Lemma 1.1.2, si ha

$$F(v) \geq \widetilde{F}(\chi^+(v)) \geq \widetilde{F}(u) = F(\Psi^+(u))$$

e quindi $\Psi^+(u)$ è un minimo per (P^+). $\square$

Ovviamente se si lavora con funzioni decrescenti, cioè se si lavora nel caso in cui $\alpha > \beta$, si possono definire in modo analogo Ω^-, $\widetilde{\Omega}^-$, χ_v^-, Ψ_u^-. In particolare, diamo esplicitamente la definizione di queste ultime due funzioni, dato che ne faremo uso nella Sezione 2.2:

$$\chi_v^-(\tau) := b + \int_\alpha^\tau (\omega_v^-)'(\sigma)\mathrm{d}\sigma \text{ con } \omega_v^-(\tau) := \max\{t \in [a,b] : v(t) = \tau\} \quad (1.1.7)$$

e

$$\Psi_u^-(t) := \begin{cases} u^{-1}(t - a + u(\beta)) & \text{se } a \leq t \leq u(s_0) + a - u(\beta) \\ s_0 & \text{se } u(s_0) + a - u(\beta) \leq t \leq u(s_0) \\ u^{-1}(t - b + u(\beta)) & \text{se } u(s_0) \leq t \leq b. \end{cases} \quad (1.1.8)$$

Come fatto in precedenza in questa sezione, si riescono a dimostrare per queste mappe proprietà del tutto analoghe a quelle delle mappe χ^+ e Ψ^+.

1.2 Il problema di Bolza: condizioni necessarie e sufficienti per l'ottimalità

Dimostrato il Teorema 1.1.3 possiamo spostare la nostra attenzione sul problema $(\widetilde{P}^+)$ ed enunciare delle condizioni necessarie e sufficienti per esso. Ricordiamo che

$$\mu = \min_{s \in [\alpha,\beta]} f(s, 0),$$

vedi (1.1.4) e che, in analogia alla (1.0.5), per ogni $(s, z) \in [\alpha, \beta] \in (0, +\infty)$ definiamo

$$\partial_+ f(s, z) := \{\xi \in \mathbb{R} \ : \ f(s, w) - f(s, z) \geq \xi(w - z) \text{ per ogni } w > 0\}. \quad (1.2.1)$$

Teorema 1.2.1. *Una funzione $u_0 \in \widetilde{\Omega}^+$ è un minimo per il problema $(\widetilde{P}^+)$ se e solo se è soddisfatta una delle seguenti:*

$(EL)_1$ (se $u_0(\beta) = b$): esiste $c \leq \mu \ : \ c \in \partial_+ \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))$ q.o. in (α, β)

$(EL)_2$ (se $u_0(\beta) < b$): $\mu \in \partial_+ \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))$ q.o. in (α, β)

Dimostrazione. ($\Rightarrow$): Sia $u_0 \in \widetilde{\Omega}^+$ un minimo per $(\widetilde{P}^+)$.
Consideriamo prima il caso $u_0(\beta) = b$. Ovviamente u_0 è un minimo per il problema di minimizzazione anche se si stringe la classe di ricerca alle funzioni di $\widetilde{\Omega}^+$ soddisfacenti $u(\beta) = b$. Di conseguenza applicando [17, Teorema 4.1], si ottiene che esiste $\bar{c} \in \mathbb{R}$ tale che $\bar{c} \in \partial \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))$ per q.o. $\tau \in (\alpha, \beta)$. Sia $c^* = \inf C$ dove

$$C := \{c \in \mathbb{R} \ : \ c \in \partial_+ \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau)) \text{ per q.o. } \tau \in (\alpha, \beta)\}, \quad (1.2.2)$$

e si assuma per assurdo $\mu < c^*$. Poniamo

$$s(\tau) := \sup_{\xi < u_0'(\tau)} \frac{\widetilde{f}(\tau, \xi) - \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))}{\xi - u_0'(\tau)} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}; \quad (1.2.3)$$

$s(\tau)$ è ben definita per q.o. $\tau \in (\alpha, \beta)$ ed inoltre esiste un insieme di misura positiva $U \subset (\alpha, \beta)$ in cui $\mu < s(\tau)$. Infatti, se così non fosse si avrebbe

$$s(\tau) \leq \mu \text{ q.o. in } (\alpha, \beta)$$

da cui seguirebbe che

$$\frac{\widetilde{f}(\tau, \xi) - \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))}{\xi - u_0'(\tau)} \leq \mu \quad \text{per ogni } \xi < u_0'(\tau), \text{ q.o. in } (\alpha, \beta)$$

che ci porterebbe ad ottenere

$$\widetilde{f}(\tau, \xi) - \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau)) \geq \mu(\xi - u_0'(\tau)), \text{ per ogni } \xi < u_0'(\tau), \text{ q.o. in } (\alpha, \beta).$$

D'altra parte, avendo che $\mu < c^* < \bar{c}$ si ha anche

$$\widetilde{f}(\tau, \xi) - \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau)) \geq \mu(\xi - u_0'(\tau)), \text{ per ogni } \xi > u_0'(\tau), \text{ q.o in } (\alpha, \beta),$$

e queste due osservazioni affermerebbero che $\mu \in C$, il che è una contraddizione.
Quindi esiste U con le caratteristiche dette prima. Per ogni $\tau \in U$ si definisca

$$\Xi(\tau) = \{\xi < u_0'(\tau) \,:\, \widetilde{f}(\tau,\xi) - \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau)) < \mu(\xi - u_0'(\tau))\}.$$

Per sua definizione $\Xi(\tau)$ è un insieme non vuoto e misurabile per ogni $\tau \in U$.
Sia $\xi(\tau)$ una selezione misurabile di $\Xi(\tau)$ e si ponga

$$\eta(\tau) = \begin{cases} \xi(\tau) & \text{se } \tau \in U \\ u_0'(\tau) & \text{se } \tau \in (\alpha,\beta) \setminus U \end{cases} \tag{1.2.4}$$

e

$$u(\tau) = a + \int_\alpha^\tau \eta(\sigma)\mathrm{d}\sigma. \tag{1.2.5}$$

Si noti che u appartiene alla classe $\widetilde{\Omega}^+$; infatti $u \in W^{1,1}(\alpha,\beta)$, $u(\alpha) = a$ e

$$u(\beta) = a + \int_\alpha^\beta \eta(\sigma)\mathrm{d}\sigma = a + \int_\alpha^\beta u_0'(\sigma)\mathrm{d}\sigma + \int_U [\xi(\sigma) - u_0'(\sigma)]\mathrm{d}\sigma < u_0(\beta) = b.$$

Ma sfruttando la definizione di $\Xi(\tau)$ si ottiene anche

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(u) &= \int_\alpha^\beta \widetilde{f}(\tau, \eta'(\tau))\mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta)) = \\ &= \int_U \widetilde{f}(\tau,\xi(\tau))\mathrm{d}\tau + \int_{(\alpha,\beta)\setminus U} \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))\mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta)) < \\ &< \int_U \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))\mathrm{d}\tau + \int_U \mu[\xi(\tau) - u_0'(\tau)]\mathrm{d}\tau + \\ &\quad + \int_{(\alpha,\beta)\setminus U} \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))\mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta)) = \\ &= \int_\alpha^\beta \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))\mathrm{d}\tau + \int_U \mu[\xi(\tau) - u_0'(\tau)]\mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta)) = \\ &= \widetilde{F}(u_0) + \int_\alpha^\beta \mu[\eta(\tau) - u_0'(\tau)]\mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta)) = \widetilde{F}(u_0), \end{aligned}$$

che è una contraddizione avendo supposto u_0 minimo per il problema $(\widetilde{P}^+)$.
Quindi $\mu \geq c^*$.

Se $\mu = c^*$ allora esiste una successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a μ e tale che $c_n \in \partial_+\widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))$ per ogni $\tau \in (\alpha,\beta) \setminus F_n$, con $|F_n| = 0$. Si ponga $F = \bigcup_{n=0}^{+\infty} F_n$. Per la chiusura del sottodifferenziale, si ottiene che $\mu \in \partial_+\widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))$ per ogni $\tau \in (\alpha,\beta) \setminus F$, da cui segue che $\mu \in C$. Infine se $\mu > c^*$ allora esiste $c \in C$ tale che $c < \mu$, e quindi la $(\mathrm{EL})_1$ è dimostrata.

Consideriamo ora il caso in cui $u_0(\beta) < b$. Si assuma per assurdo che l'insieme $S = \{\tau \in (\alpha, \beta) \,:\, \mu \notin \partial_+ \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))\}$ abbia misura positiva. Per ogni $\tau \in S$ si definisca

$$Q(\tau) = \{q \in \mathbb{R}^+ \,:\, \widetilde{f}(\tau, q) - \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau)) < \mu(q - u_0'(\tau))\}$$

e sia $q = q(\tau)$ un selezione misurabile di $Q(\tau)$. Si scelga $E \subset S$ di misura positiva sufficientemente piccola di modo che

$$\int_E [q(\tau) - u_0'(\tau)]\mathrm{d}\tau < b - u_0(\beta) \tag{1.2.6}$$

e si ponga

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} q(\tau) & \text{se } \tau \in E \\ u_0'(\tau) & \text{se } \tau \in (\alpha, \beta) \setminus E \end{cases} \tag{1.2.7}$$

e

$$u(\tau) = a + \int_\alpha^\tau \gamma(\sigma)\mathrm{d}\sigma. \tag{1.2.8}$$

Si ottiene così una funzione u che appartiene a $\widetilde{\Omega}^+$, infatti $u \in W^{1,1}(\alpha, \beta)$, $u(\alpha) = a$ e

$$\begin{aligned}
u(\beta) &= a + \int_\alpha^\beta \gamma(\tau)\mathrm{d}\tau = \\
&= a + \int_E q(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{(\alpha,\beta)\setminus E} u_0'(\tau)\mathrm{d}\tau = \\
&= a + \int_\alpha^\beta u_0'(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_E [q(\tau) - u_0'(\tau)]\mathrm{d}\tau < \\
&< u_0(\beta) + b - u_0(\beta) = b.
\end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(u) &= \int_\alpha^\beta \widetilde{f}(\tau, u'(\tau))\mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta)) = \\
&= \int_E \widetilde{f}(\tau, q(\tau))\mathrm{d}\tau + \int_{(\alpha,\beta)\setminus E} \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))\mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta)) = \\
&= \int_\alpha^\beta \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))\mathrm{d}\tau + \int_E [\widetilde{f}(\tau, q(\tau)) - \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))]\mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta)) < \\
&< \int_\alpha^\beta \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))\mathrm{d}\tau + \int_E \mu[q(\tau) - u_0'(\tau)]\mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta)) = \\
&= \int_\alpha^\beta \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))\mathrm{d}\tau + \int_\alpha^\beta \mu[\gamma(\tau) - u_0'(\tau)]\mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta)) = F(u_0),
\end{aligned}$$

e quindi abbiamo ottenuto una contraddizione. Dunque $(\mathrm{EL})_2$ è dimostrata.

($\Leftarrow$): Fissiamo $u_0 \in \widetilde{\Omega}^+$, con $u_0(\beta) = b$, e assumiamo che per qualche $c < \mu$ si abbia $c \in \partial_+ \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))$ per q.o. $\tau \in (\alpha, \beta)$. Quindi per ogni $u \in \widetilde{\Omega}^+$ si ha

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(u) - \widetilde{F}(u_0) &= \int_\alpha^\beta [\widetilde{f}(\tau, u(\tau)) - \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))] \mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta)) \geq \\
&\geq \int_\alpha^\beta c[u'(\tau) - u_0'(\tau)] \mathrm{d}\tau + \mu(b - u(\beta)) = \\
&= c(u(\beta) - b) + \mu(b - u(\beta)) = \\
&= (\mu - c)(b - u(\beta)) \geq 0,
\end{aligned}$$

ottenendo così che u_0 è un minimo per il problema $(\widetilde{P}^+)$.

Supponiamo invece che esista $u_0 \in \widetilde{\Omega}^+$ tale che $u_0(\beta) < b$ e $\mu \in \partial_+ \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))$ per q.o. $\tau \in (\alpha, \beta)$. Allora

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(u) - \widetilde{F}(u_0) &= \int_\alpha^\beta [\widetilde{f}(\tau, u(\tau)) - \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))] \mathrm{d}\tau + \mu(u_0(\beta) - u(\beta)) \geq \\
&\geq \int_\alpha^\beta \mu[u'(\tau) - u_0'(\tau)] \mathrm{d}\tau + \mu(u_0(\beta) - u(\beta)) = 0,
\end{aligned}$$

ottenendo così che u_0 è un minimo per il problema $(\widetilde{P}^+)$.

$\square$

1.3 Il problema vincolato: condizioni necessarie e sufficienti per l'ottimalità

Nel caso del problema vincolato (P^+) si ha che una funzione in Ω^+ è minimo se e solo se soddisfa l'equazione di Du Bois-Reymond, espressa in forma di inclusione differenziale. Questo risultato è quanto espresso dal teorema seguente.

Teorema 1.3.1. *Una funzione $v_0 \in \Omega^+$ è un minimo per il problema (P^+) se e solo se $\partial_+ f(v_0(t), v_0'(t)) \neq \emptyset$ per q.o. $t \in A_{v_0}$ ed è soddisfatta una delle seguenti:*

$(DBR)_1$ (se $|B_{v_0}| = 0$): esiste $c \leq \mu$ tale che

$$f(v_0(t), v_0'(t)) - c \in v_0'(t) \partial_+ f(v_0(t), v_0'(t)) \text{ q.o. in } (a, b);$$

(DBR)$_2$ (se $|B_{v_0}| > 0$): $f(v_0(t), 0) = \mu$ per q.o. $t \in B_{v_0}$ e

$$f(v_0(t), v_0'(t)) - \mu \in v_0'(t)\partial_+ f(v_0(t), v_0'(t)) \textit{ q.o. in } A_{v_0}.$$

Dimostrazione. ($\Rightarrow$): Sia v_0 un minimo per il problema (P^+). Utilizzando il Teorema 1.1.3 si ha che $\chi_{v_0}^+$ è un minimo per il problema $(\widetilde{P}^+)$. D'ora in avanti, per semplicità di scrittura, scriveremo χ invece di χ^+; analogamente quando scriveremo Ψ esso andrà inteso come Ψ^+.

Supponiamo che sia $|B_{v_0}| = 0$. Ciò implica, utilizzando (iv) in Lemma 1.1.1 che $\chi_{v_0}(\beta) = b$. Siamo quindi nelle ipotesi del primo caso del Teorema 1.2.1 per cui esiste $c \le \mu$ tale che $c \in \partial_+ \widetilde{f}(\tau, u_0'(\tau))$ q.o. in (α, β). Dalla proprietà (v) del Lemma 1.0.1, si ottiene

$$\chi_{v_0}'(\tau)\left[f\left(\tau, \frac{1}{\chi_{v_0}'(\tau)}\right) - c\right] \in \partial_+ f\left(\tau, \frac{1}{\chi_{v_0}'(\tau)}\right) \text{ per q.o. } \tau \in (\alpha, \beta)$$

per qualche $c \le \mu$. Da (1.1.1) e (1.0.3) possiamo riscrivere l'inclusione sopra così:

$$\omega_{v_0}'(\tau)\left[f\left(\tau, \frac{1}{\omega_{v_0}'(\tau)}\right) - c\right] \in \partial_+ f\left(\tau, \frac{1}{\omega_{v_0}'(\tau)}\right) \text{ per q.o. } \tau \in v_0(A_{v_0}). \tag{1.3.1}$$

Siano $E = \{\tau \in v_0(A_{v_0}) \,:\, \text{vale (1.3.1)}\}$ e $A' = v_0^{-1}(E)$. Dalla (1.0.4) $|A_{v_0} \setminus A'| = 0$ e per ogni $t \in A_{v_0}$ si ha, dalla proprietà (ii) del Lemma 1.1.1, che $v_0(t) \in E$ e che $v_0'(t) = \frac{1}{\omega_{v_0}'(v_0(t))}$. Si deduce quindi che $\partial_+ f(v_0(t), v_0'(t)) \neq \emptyset$ per q.o. $t \in A_{v_0}$ e

$$f(v_0(t), v_0'(t)) - c \in v_0'(t)\partial_+ f(v_0(t), v_0'(t)) \text{ q.o. in } A_{v_0}.$$

Consideriamo ora il caso di v_0 minimo per il problema (P^+) con $|B_{v_0}| > 0$. Utilizzando il Teorema 1.1.3 si ha che χ_{v_0} è un minimo per il problema $(\widetilde{P}^+)$ e utilizzando il Lemma 1.1.1 si ha che $\chi_{v_0}(\beta) < b$. Ora siamo nelle ipotesi del secondo dei due casi del Teorema 1.2.1, il che implica che $\mu \in \partial_+ \widetilde{f}(\tau, \chi_{v_0}'(\tau))$ q.o. in (α, β). Ricalcando la dimostrazione precedente si ottiene

$$f(v_0(t), v_0'(t)) - \mu \in v_0'(t)\partial_+ f(v_0(t), v_0'(t)) \text{ q.o. in } A_{v_0}.$$

Dal Lemma 1.1.2 si ottiene anche che $f(v_0(t), 0) = \mu$ per q.o. $t \in B_{v_0}$. Così risulta provato l'asserto.

($\Leftarrow$): Sia $v_0 \in \Omega^+$ soddisfacente la condizione $(\mathrm{DBR})_1$ e quindi tale che $|B_{v_0}| = 0$. poiché si ha $|v_0(A_{v_0})| = \beta - \alpha$, la proprietà (ii) del Lemma 1.1.1

e $(\mathrm{DBR})_1$ implicano

$$f\left(\tau, \frac{1}{\chi'_{v_0}(\tau)}\right) - c \in \frac{1}{\chi'_{v_0}(\tau)} \partial_+ f\left(\tau, \frac{1}{\chi'_{v_0}(\tau)}\right) \text{ per q.o. } \tau \in (\alpha, \beta).$$

Dalla proprietà (v) del Lemma 1.0.1 si ha che la funzione χ_{v_0} soddisfa $(\mathrm{EL})_1$ in Teorema 1.2.1 e quindi, per tale teorema, χ_{v_0} è un minimo per il problema $(\widetilde{P}^+)$. Ora, il Teorema 1.1.3 garantisce che $\Psi(\chi_{v_0})$ è un minimo per il problema (P^+). Poiché $|B_{v_0}| = 0$, applicando il Lemma 1.1.2 si ottiene $F(v_0) = \widetilde{F}(\chi_{v_0}) = F(\Psi(\chi_{v_0}))$ e questo implica che v_0 è un minimo per il problema (P^+).

Si assuma ora che $v_0 \in \Omega$ soddisfi la condizione $(\mathrm{DBR})_2$ e quindi tale che $|B_{v_0}| > 0$. Il Lemma 1.1.1 assicura che $\chi_{v_0}(\beta) < b$ e, poiché $|v_0(A_{v_0})| = \beta - \alpha$, la proprietà (ii) del Lemma 1.1.1 porta a concludere che

$$f\left(\tau, \frac{1}{\chi'_{v_0}(\tau)}\right) - \mu \in \frac{1}{\chi'_{v_0}(\tau)} \partial_+ f\left(\tau, \frac{1}{\chi'_{v_0}(\tau)}\right) \text{ per q.o. } \tau \in (\alpha, \beta).$$

Dalla proprietà (v) del Lemma 1.0.1 si ha che la funzione χ_{v_0} soddisfa le ipotesi $(\mathrm{EL})_2$ e, in virtù del Teorema 1.2.1, si deduce che χ_{v_0} è un minimo per il problema $(\widetilde{P}^+)$. Poiché $f(v_0(t), v_0'(t)) = \mu$ per q.o. $t \in B_{v_0}$, dal Lemma 1.1.2 si deduce che $F(v_0) = \widetilde{F}(\chi_{v_0}) = F(\Psi(\chi_{v_0}))$ e questo implica che v_0 è un minimo per il problema (P^+). $\square$

Una cosa molto importante da notare è che le condizioni (DBR) sono necessarie e sufficienti per il problema vincolato, ma non lo sono appena si passa al problema libero.

1.4 Risolubilità di (P_+^{**}) e dipendenza dai dati al bordo

In questo paragrafo ci soffermeremo a lavorare sul nostro problema vincolato, aggiungendo anche l'ipotesi di convessità nella seconda variabile per la funzione integranda f. Utilizzando i risultati di questa sezione assieme a quelli della sezione 1.5 si potranno ottenere risultati per il problema (P^+) senza ipotesi di convessità. Per ricordarci di questa ipotesi di convessità, all'interno di questa sezione e in vista delle applicazioni al caso generale di f non convessa, scriveremo qui f^{**} invece che scrivere f. Un'ulteriore ipotesi con cui lavoreremo all'interno di questo paragrafo sarà

- $f^{**} : [\alpha, \beta] \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ continua.

Indicheremo inoltre con F^{**} il funzionale F in cui la funzione integranda f è sostituita da f^{**} e scriveremo (P_+^{**}) invece di (P^+) per riferirci al problema variazionale convesso ristretto all'insieme Ω^+. Queste notazioni saranno utilizzate anche nelle sezioni e capitoli successivi.

La linea seguita sarà quella di stabilire delle condizioni sostitutive alle (DBR) del Teorema 1.3.1.

Abbiamo bisogno di introdurre alcune notazioni e alcuni risultati preliminari, prima di enunciare i risultati principali di questo paragrafo, Teoremi 1.4.3, 1.4.4 e 1.4.7.

Sia $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Siano $h^+(z)$ e $h^-(z)$ rispettivamente la derivata destra e sinistra di h nel punto z. Per ogni $z > 0$ si ponga

$$g^+(z) := h(z) - zh^+(z), \quad g^-(z) := h(z) - zh^-(z)$$

e si definisca

$$\gamma^-(y) := \max\{z > 0 \,:\, g^-(z) \geq y\}, \quad \gamma^+(y) := \min\{z > 0 \,:\, g^+(z) \leq y\}$$

per $\lambda < y < \Lambda$, dove

$$\lambda := \inf_{z>0} g^+(z) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

$$\Lambda := \sup_{z>0} g^-(z) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Enunciamo, senza dimostrazione, alcune proprietà di $\gamma^\pm$ e $g^\pm$.

Lemma 1.4.1. *Se $\lambda < \Lambda$, allora le funzioni γ^+ e γ^- sono ben definite in (λ, Λ). Inoltre γ^- è continua da sinistra, γ^+ è continua da destra, e sono verificate le seguenti:*

$$\gamma^+(y_2) \leq \gamma^-(y_2) \leq \gamma^+(y_1) \leq \gamma^-(y_1) \ \textit{ se } y_1 < y_2, \tag{1.4.1}$$

$$\gamma^+(g^+(z)) \leq z \leq \gamma^-(g^-(z)) \ \textit{ per ogni } z > 0,$$
$$g^+(\gamma^+(y)) \leq y \leq g^-(\gamma^-(y)) \ \textit{ per ogni } y \in (\lambda, \Lambda). \tag{1.4.2}$$

Date γ^+ e γ^-, se ne riesce a definire una estensione fino ai punti λ e Λ, quando questi sono finiti, nel modo seguente:
se $\Lambda \in \mathbb{R}$ si ponga

$$\gamma^+(\Lambda) = 0, \quad \gamma^-(\Lambda) = \lim_{y \to \Lambda^-} \gamma^-(y) \in [0, +\infty),$$

e se $\lambda \in \mathbb{R}$ si ponga

$$\gamma^+(\lambda) = \lim_{y \to \lambda^+} \gamma^+(y) \in (0, +\infty],\ \gamma^-(\lambda) = +\infty.$$

In questa maniera si sono ottenute due funzioni γ^+ e γ^- non negative, a valori estesi, la prima continua da destra, la seconda continua da sinistra, che soddisfano (1.4.1) e $g^+(\gamma^+(\Lambda)) = g^+(0) = \Lambda$. Inoltre, se $\gamma^-(\lambda) > 0$, allora $g^-(z) \equiv \Lambda$ in $(0, \gamma^-(\Lambda)]$ e $g^-(\gamma^-(\Lambda)) = \Lambda$. In maniera analoga, se $\gamma^+(\lambda) < +\infty$, allora si ottiene che $g^+(z) \equiv \lambda$ in $[\gamma^+(\lambda), +\infty)$ e $g^+(\gamma^+(\lambda)) = \lambda$.

Si passi ora al caso in due variabili, prendendo in considerazione la funzione f^{**}, e definendo

$$g^-(s,z) := f^{**}(s,z) - z f^{**}_-(s,z), \quad g^+(s,z) := f^{**}(s,z) - z f^{**}_+(s,z),$$

per ogni $(s,z) \in [\alpha,\beta] \times (0,+\infty)$, dove $f^{**}_-(s,z), f^{**}_+(s,z)$ rappresentano rispettivamente la derivata sinistra e destra della funzione $f^{**}(s,\cdot)$ nel punto z. Si definiscano ancora

$$\lambda(s) := \inf_{z>0} g^+(s,z) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ \Lambda(s) := \sup_{z>0} g^-(s,z) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

e, per ogni $\lambda(s) < y < \Lambda(s)$, siano

$$\gamma^-(s,y) := \max\{z > 0 \,:\, g^-(s,z) \geq y\},\ \gamma^+(s,y) := \min\{z > 0 \,:\, g^+(s,z) \leq y\}.$$

Si può subito dire qualcosa sulla regolarità di queste funzioni:

Lemma 1.4.2. *Se f^{**} è continua in $[\alpha,\beta] \times [0,+\infty)$, allora $g^+(\cdot,z)$ e $\Lambda(\cdot)$ sono inferiormente semicontinue in $[\alpha,\beta]$, mentre $g^-(\cdot,z)$ e $\lambda(\cdot)$ risultano superiormente semicontinue. Inoltre $\gamma^+(\cdot,y)$ e $\gamma^-(\cdot,y)$ sono rispettivamente inferiormente e superiormente semicontinue in $H_y = \{s \in [\alpha,\beta] \,:\, \lambda(s) < y < \Lambda(s)\}$.*

Ora, come fatto per il caso ad una variabile, estendiamo le funzioni γ^- e γ^+ nei punti del tipo $(s,\lambda(s))$ e $(s,\Lambda(s))$, ponendo

$$\gamma^-(s,\lambda(s)) = +\infty, \quad \gamma^+(s,\lambda(s)) = \lim_{y \to \lambda(s)^+} \gamma^+(s,y) \leq +\infty,$$

$$\gamma^+(s,\Lambda(s)) = 0, \quad \gamma^-(s,\Lambda(s)) = \lim_{y \to \Lambda(s)^-} \gamma^-(s,y) \geq 0.$$

Ora abbiamo che le funzioni $\gamma^-(s,y)$ e $\gamma^+(s,z)$ sono definite per ogni $s \in [\alpha,\beta]$ e $y \in [\lambda(s),\Lambda(s)] \cap \mathbb{R}$ e sono decrescenti nella seconda variabile. Usando per convenzione che $\frac{1}{+\infty} = 0$ e $\frac{1}{0} = +\infty$ si possono anche definire le funzioni $\frac{1}{\gamma^+(s,y)}$ e $\frac{1}{\gamma^-(s,y)}$, che risultano essere funzioni a valori in $[0,+\infty]$, rispettivamente continue da destra e da sinistra nella variabile $y \in [\lambda(s),\Lambda(s)] \cap \mathbb{R}$.

Dal momento che ora stiamo ragionando sul problema (P_+^{**}), definiamo $\mu = \min_{s\in[\alpha,\beta]} f^{**}(s,0)$. Sia inoltre

$$c_0 := \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[\alpha,\beta]} \lambda(s).$$

Si può enunciare il seguente risultato.

Teorema 1.4.3. *Sia* $f^{**} : [\alpha,\beta] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *continua. Se* $c_0 < \mu$ *si assuma anche che*

$$\frac{1}{\gamma^-(s,c)} \in L^1(\alpha,\beta) \text{ per ogni } c \in (c_0,\mu). \tag{1.4.3}$$

Se il problema (P_+^{**}) *ammette minimo, allora*

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^-(s,\hat{c})} \mathrm{d}s \le b - a \tag{1.4.4}$$

per qualche costante $\hat{c} \in [c_0,\mu]$.

Vale anche il viceversa di questo teorema, fatta eccezione per il fatto che nell'ipotesi si esclude il caso $\hat{c} = c_0$. E' quanto espresso dal seguente teorema, in cui, in aggiunta, si dà un risultato di regolarità per i minimi di (P_+^{**}).

Teorema 1.4.4. *Sia* $f^{**} : [\alpha,\beta] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *continua. Sia inoltre* $c_0 < \mu$ *e si assuma* (1.4.3). *Se vale la* (1.4.4) *per una qualche costante* $\hat{c} \in (c_0,\mu]$, *allora il problema* (P_+^{**}) *ammette minimo.*

Inoltre, se (1.4.4) *vale per* $\hat{c} > \max_{s\in[\alpha,\beta]} \lambda(s)$, *allora il minimo è anche lipschitziano.*

Provvediamo ora alla dimostrazione di questi due risultati. Faremo uso del seguente lemma.

Lemma 1.4.5. *Sia* $f^{**} : [\alpha,\beta] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *continua. Allora*

$$\mu := \min_{\sigma\in[\alpha,\beta]} f^{**}(\sigma,0) \le f^{**}(s,0) \le \Lambda(s) \quad \text{per ogni } s \in [\alpha,\beta]$$

e, per ogni $c \in [c_0,\mu]$,

$$\lambda(s) \le c \le \mu \quad \text{per q.o. } s \in [\alpha,\beta].$$

Dimostrazione. La prima cosa da notare è che $\mu \leq \Lambda(s)$ per ogni $s \in [\alpha, \beta]$. Infatti, il $\lim\limits_{z \to 0^+} f_+^{**}(s, z) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, da cui segue $\lim\limits_{z \to 0^+} z f_+^{**}(s, z) \in [-\infty, 0]$. Dunque

$$\mu \leq f^{**}(s, 0) \leq \lim_{z \to 0^+} g^+(s, z) \leq \Lambda(s).$$

Inoltre, $\mu < \Lambda(s)$ quando $f^{**}(s, 0) > \mu$. Da tutto ciò segue che ogni costante $c \in [c_0, \mu]$ è tale che $\lambda(s) \leq c \leq \Lambda(s)$ quasi ovunque in (α, β), e di conseguenza esistono, finiti o meno, $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^-(s,c)} \mathrm{d}s$ e $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^+(s,c)} \mathrm{d}s$. $\square$

Siamo ora pronti per la dimostrazione dei teoremi precedenti.

Dimostrazione del Teorema 1.4.3. Sia v_0 un minimo del problema (P_+^{**}). Dal Teorema 1.3.1, segue che esso soddisfa le condizioni (DBR), quindi deve esistere una qualche costante $c \leq \mu$ tale che si abbia

$$f^{**}((v_0(t), v_0'(t)) - c \in v_0'(t) \partial_+ f^{**}(v_0(t), v_0'(t)) \text{ q.o. in } A_{v_0}.$$

Di conseguenza si ottiene $g^+(v_0(t), v_0'(t)) \leq c \leq g^-(v_0(t), v_0'(t))$ q.o. in A_{v_0}. Dal fatto che $|v_0(A_{v_0})| = \beta - \alpha$ e dalla proprietà *(ii)* del Lemma 1.1.1 si ottiene

$$g^+(\tau, \frac{1}{\chi_{v_0}'(\tau)}) \leq c \leq g^-(\tau, \frac{1}{\chi_{v_0}'(\tau)}), \text{ per q.o. } \tau \in (\alpha, \beta).$$

Questo implica che $\lambda(s) \leq c \leq \Lambda(s)$ per quasi ogni $s \in [\alpha, \beta]$ e quindi che $c_0 \leq c \leq \mu$. Come già detto all'inizio della dimostrazione si ha che la funzione $\frac{1}{\gamma^-(s,c)}$ è quindi ben definita e misurabile. Poiché γ^- è decrescente nella sua seconda variabile si ottiene $\gamma^-(\tau, c) \geq \gamma^-(\tau, g^-(\tau, \frac{1}{\chi_{v_0}'(\tau)})) \geq \frac{1}{\chi_{v_0}'(\tau)}$ per q.o. τ in (α, β), da cui segue che $0 \leq \frac{1}{\gamma^-(\tau,c)} \leq \chi_{v_0}'(\tau)$ per q.o. τ in (α, β). Da tutto ciò abbiamo che $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^-(\tau,c)} \mathrm{d}\tau \leq b - a$ e quindi che (1.4.4) è soddisfatta. $\square$

Dimostrazione del Teorema 1.4.4. Divideremo la dimostrazione in due casi:

- *primo caso* - $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^-(s,\mu)} \mathrm{d}s \leq b - a$.

In questo caso si ponga $u_0(\tau) := a + \int_\alpha^\tau \frac{1}{\gamma^-(s,\mu)} \mathrm{d}s$. Poiché $\mu > c_0$ si ha che $\gamma^-(s, \mu) < +\infty$, da cui segue che $u_0'(\tau) > 0$ per q.o. $\tau \in (\alpha, \beta)$ e quindi $u_0 \in \widetilde{\Omega}^+$.

Si ponga $v_0 = \Psi_{u_0}^+$; si dimostrerà che v_0 è un minimo per il problema (P_+^{**}). Sfruttando (1.1.2) e (1.0.4) si ottiene $v_0'(t) = \frac{1}{u_0'(v_0(t))} = \gamma^-(v_0(t), \mu)$, per q.o. $t \in A_{v_0}$, inoltre dalla seconda disuguaglianza in (1.4.2) risulta

$$g^-(v_0(t), v_0'(t)) = g^-(v_0(t), \gamma^-(v_0(t), \mu)) \geq \mu \quad \text{q.o. in } A_{v_0}.$$

Da (1.4.1) $\gamma^+(v_0(t),\mu) \le \gamma^-(v_0(t),\mu) = v_0'(t)$ da cui segue, usando anche (1.4.2), che

$$\mu \ge g^+(v_0(t),\gamma^+(v_0(t),\mu)) \ge g^+(v_0(t),v_0'(t)) \quad \text{q.o. in } A_{v_0}.$$

Quindi si è ottenuto $g^+(v_0(t),v_0'(t)) \le \mu \le g^-(v_0(t),v_0'(t))$ per q.o. $t \in A_{v_0}$. Da qui si evince che $f^{**}(v_0(t),v_0'(t)) - \mu \in v_0'(t)\partial_+ f^{**}(v_0(t),v_0'(t))$ q.o. in A_{v_0}. Sempre da (1.1.2) segue $f^{**}(v_0(t),0) = \mu$ q.o. in B_{v_0}. Quindi v_0 soddisfa le condizioni $(\mathrm{DBR})_2$ del Teorema 1.3.1. Per tale teorema possiamo dunque concludere che v_0 è un minimo per il problema (P_+^{**}).

- *secondo caso* - $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^-(s,\mu)}\mathrm{d}s > b-a$.

Si ponga $\tilde{c} := \sup\{c > c_0 \ : \ \int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^-(s,c)}\mathrm{d}s \le b-a\}$. Si noti che per le nostre ipotesi questo insieme non è vuoto, e che quindi ne esiste il sup. poiché $\gamma^-(s,\cdot)$ è continua da sinistra, decrescente, e per il Teorema di convergenza monotona, si ottiene $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^-(s,\tilde{c})}\mathrm{d}s \le b-a$, e che $\tilde{c} < \mu$.

Sia $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente, convergente a $\tilde{c}$ e tale che $c_1 < \mu$. Per il Lemma 1.4.5 si ha che $\lambda(s) < c_1 < \Lambda(s)$ per q.o. $s \in [\alpha,\beta]$. Dunque $\gamma^+(\cdot,c_1)$ è ben definita e positiva q.o. in $[\alpha,\beta]$. Inoltre , da (1.4.1) si ottiene $\gamma^+(s,c_1) \ge \gamma^-(s,c)$ per ogni $c \in (c_1,\mu)$, utilizzando (1.4.3) deduciamo che $\frac{1}{\gamma^+(s,c_1)} \in L^1(\alpha,\beta)$. Quindi, dato che $\frac{1}{\gamma^+(s,c_n)} \le \frac{1}{\gamma^+(s,c_1)}$ per q.o. $s \in (\alpha,\beta)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, applicando il Teorema di convergenza dominata e usando la continuità da destra di $\gamma^+(s,\cdot)$, si giunge ad affermare che $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^+(s,c_n)}\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^+(s,\tilde{c})}\mathrm{d}s$. Ma abbiamo anche $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^+(s,c_n)}\mathrm{d}s \ge \int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^-(s,c_n)}\mathrm{d}s > b-a$. Ricapitolando si ottiene

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^-(s,\tilde{c})}\mathrm{d}s \le b-a \le \int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^+(s,\tilde{c})}\mathrm{d}s < +\infty. \tag{1.4.5}$$

Si prenda ora in considerazione la funzione definita da

$$\Gamma(\sigma) := \int_\alpha^\sigma \frac{1}{\gamma^-(s,\tilde{c})}\mathrm{d}s + \int_\sigma^\beta \frac{1}{\gamma^+(s,\tilde{c})}\mathrm{d}s.$$

Ovviamente Γ è continua e dalla (1.4.5) si ottiene

$$\Gamma(\alpha) \ge b-a \ge \Gamma(\beta),$$

da cui segue l'esistenza di un valore $\bar{\sigma} \in [\alpha,\beta]$ tale che $\Gamma(\bar{\sigma}) = b-a$. Si consideri inoltre la funzione

$$u_0(\tau) := \int_\alpha^\tau \xi(s)\mathrm{d}s, \text{ dove } \xi(s) := \begin{cases} \frac{1}{\gamma^-(s,\tilde{c})} & \text{per } s \in [\alpha,\bar{\sigma}] \\ \frac{1}{\gamma^+(s,\tilde{c})} & \text{per } s \in [\bar{\sigma},\beta]. \end{cases}$$

Dal fatto che $\tilde{c} > c_0$ segue che $u_0'(t) > 0$ per q.o. $\tau \in (\alpha, \beta)$, e quindi $u_0 \in \widetilde{\Omega}$, con $u_0(\beta) = b$. Si ponga per ultimo $v_0 := \Psi^+_{u_0}$ e dimostriamo che v_0 è un minimo per il problema (P^{**}_+). Si ha $v_0'(t) = \frac{1}{u_0'(v_0(t))}$ per q.o. $t \in (a, b)$. Di conseguenza si ottiene

$$\gamma^+(v_0(t), \tilde{c}) \leq v_0'(t) \leq \gamma^-(v_0(t), \tilde{c}) \quad \text{q.o. in } (a, b), \tag{1.4.6}$$

e da (1.4.2) e dalla decrescenza di $g^\pm$ nella seconda variabile segue

$$\begin{aligned} &g^+(v_0(t), v_0'(t)) \leq g^+(v_0(t), \gamma^+(v_0(t), \tilde{c})) \leq \tilde{c} \leq \\ &\leq g^-(v_0(t), \gamma^-(v_0(t), \tilde{c})) \leq g^-(v_0(t), v_0'(t)) \quad \text{q.o. in } (a, b). \end{aligned}$$

Quindi v_0 soddisfa le condizioni $(\mathrm{DBR})_1$ del Teorema 1.3.1, implicando così che v_0 è un minimo per il problema (P^{**}_+).

Per quanto riguarda la lipschitzianità del minimo, si noti dapprima che $\lambda(s)$ ammette massimo M in $[\alpha, \beta]$, e ciò segue dalla superiore semicontinuità (si veda il Lemma 1.4.2).
Nel secondo caso si consideri nella dimostrazione che $\hat{c} > M$. Essendo $\tilde{c} \geq \hat{c}$ per definizione di $\tilde{c}$, si ha allora che $\tilde{c} > M$. Da ciò segue che $\lambda(s) \leq M < \tilde{c} < \mu \leq \Lambda(s)$ per ogni $s \in [\alpha, \beta]$. Quindi $\gamma^-(\cdot, \tilde{c})$ è ben definita e, per il Lemma 1.4.2, superiormente semicontinua nell'intero compatto $[\alpha, \beta]$. Si ponga $L := \max\limits_{s \in [\alpha, \beta]} \gamma^-(s, \tilde{c})$. Si deduce, usando anche (1.4.6), che $v_0'(t) \leq \gamma^-(v_0(t), \tilde{c}) \leq L$, e che quindi v_0 è lipschitziana.

In maniera simile, nel primo caso, si scelga $c \in (M, \mu)$, in modo da ottenere $v_0'(t) \leq \gamma^-(v_0(t), \mu) \leq \gamma^-(v_0(t), c)$ per quasi ogni $t \in (a, b)$ e la dimostrazione segue i passi precedenti. $\square$

Osservazione 1.4.6. Il Teorema 1.4.4 afferma che esiste un minimo di (P^{**}_+). Per il Teorema 1.3.1 esso deve soddisfare una condizione di tipo Du Bois-Reymond. Dalla dimostrazione del Teorema 1.4.4 risulta che la costante presente in tali condizioni (DBR) è appartenente a $[\hat{c}, \mu]$, dove $\hat{c}$ è la costante in (1.4.4).

Il prossimo risultato dà una condizione necessaria e sufficiente a che un minimo abbia derivata quasi ovunque positiva. La dimostrazione segue da una rilettura della dimostrazione del Teorema 1.4.4.

Teorema 1.4.7. *Nelle ipotesi del Teorema 1.4.3 si supponga che v_0 sia un minimo di (P^{**}_+). Allora*

$$v_0'(t) > 0 \ \textit{q.o. in} \ (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma^-(s, \mu)} \mathrm{d}s \geq b - a$$

Dai Teoremi 1.4.3 e 1.4.4 possiamo evincere una conseguenza che sarà utile quando tratteremo il caso di problemi liberi. Dobbiamo introdurre ulteriori notazioni.

D'ora in poi indicheremo con $(P_+^{**})[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ con $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ il problema di minimo vincolato, rilassato, nella classe di funzioni crescenti tali che $v(x_1) = y_1$, $v(x_2) = y_2$. In questa notazione, il problema che abbiamo affrontato fino ad ora sarebbe: $(P_+^{**})[(a, \alpha), (b, \beta)]$.

Teorema 1.4.8. *Sia $f^{**} : [\alpha, \beta] \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ continua. Sia $v_0 \in \Omega^+$ soddisfacente le condizioni (DBR) in Teorema 1.3.1 con una costante $c \in (c_0, \mu]$ e sia $\frac{1}{\gamma^-(s,k)} \in L^1(\alpha, \beta)$ per ogni $k \in [c, \mu)$. Siano definiti:*

- $S_d := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \alpha \leq y \leq \beta, x \geq \min\{s \in [a, b] \,:\, v_0(s) = y\}\}$,
- $S_s := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \alpha \leq y \leq \beta, x \leq \max\{s \in [a, b] \,:\, v_0(s) = y\}\}$.

Allora esiste soluzione per i problemi:

- $(P_+^{**})[(a, \alpha), (x, y)]$, *con* $(x, y) \in S_d$,
- $(P_+^{**})[(x, y), (b, \beta)]$, *con* $(x, y) \in S_s$.

Dimostrazione. Dimostreremo per il caso $(P_+^{**})[(a, \alpha), (x, y)]$, con $(x, y) \in S_d$, l'altro caso è del tutto analogo.

Due sono le cose da notare. Per prima cosa bisogna notare che, per la natura di minimo di v_0, la restrizione di v_0 all'inervallo $[a, s]$ è un minimo per il problema $(P_+^{**})[(a, \alpha), (s, v_0(s))]$, qualunque sia $s \in [a, b]$. La seconda cosa da notare è che, come conseguenza della dimostrazione del Teorema 1.4.3, la (1.4.4) è soddisfatta con $\hat{c} = c$.

Sia $x_0 := \min\{s \in [a, b] \,:\, v_0(s) = y\}$. Dalle osservazioni fatte segue che

$$\int_\alpha^y \frac{1}{\gamma^-(s, c)} \mathrm{d}s \leq x_0 - a,$$

mentre dal fatto che $(x, y) \in S_d$ si ha $x \geq x_0$. Quindi

$$\int_\alpha^y \frac{1}{\gamma^-(s, c)} \mathrm{d}s \leq x_0 - a \leq x - a,$$

da cui, per via del Teorema 1.4.4 applicato a $(P_+^{**})[(a, \alpha), (x, y)]$, segue che esiste un minimo per tale problema. $\square$

L'ipotesi di sommabilità delle funzioni $\frac{1}{\gamma^-(s,c)}$ che appare nei teoremi precedenti si può non richiedere esplicitamente se si suppone, oltre alla continuità di f^{**} , la proprietà che $f^{**}(s,\cdot)$ abbia minimo in 0 per ogni $s \in [\alpha,\beta]$. Si dimostrerà nel prossimo capitolo, vedi Lemmi 2.1.1 e 2.3.1, che tale ipotesi si può assumere senza perdita di generalità sotto deboli assunzioni.

Infatti, vale il seguente risultato.

Lemma 1.4.9. *Sia* $f^{**} : [\alpha,\beta] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *continua e supponiamo che*

$$f^{**}(s,0) \le f^{**}(s,z) \quad \textit{per ogni } s \in [\alpha,\beta] \textit{ e } z \in [0,+\infty). \tag{1.4.7}$$

Allora

$$\inf_{s\in[\alpha,\beta]} \gamma^-(s,c) > 0 \qquad \textit{per ogni } c < \mu$$

implicando così che $\dfrac{1}{\gamma^-(s,c)} \in L^1(\alpha,\beta)$.

Dimostrazione. Assumiamo per contraddizione che sia $\inf_{s\in[\alpha,\beta]} \gamma^-(s,c) = 0$ per qualche $c < \mu$. Allora esiste un successione $(s_h)_h$ in $[\alpha,\beta]$ tale che

$$\sup \left\{ f^{**}\left(s_h, \frac{1}{h}\right) - \frac{1}{h}\partial f^{**}\left(s_h, \frac{1}{h}\right) \right\} < c. \tag{1.4.8}$$

Dimostriamo che

$$0 \le f^{**}_-\left(s_h, \frac{1}{h}\right) \le \max_{s\in[\alpha,\beta]} f^{**}(s,2), \tag{1.4.9}$$

dove $f^{**}_-(s,z)$ denota la derivata sinistra di $f^{**}(s,\cdot)$ nel punto $z > 0$. Dalla (1.4.7) la prima disuguaglianza è ovvia. Dalla convessità di $f^{**}(s_h,\cdot)$ ed essnedo $f^{**}(s,z) \ge 0$ abbiamo

$$f^{**}(s_h,2) \ge f^{**}\left(s_h, \frac{1}{h}\right) + f^{**}_-\left(s_h, \frac{1}{h}\right)\left(2 - \frac{1}{h}\right) \ge f^{**}_-\left(s_h, \frac{1}{h}\right)$$

e (1.4.9) segue. Da (1.4.8) e (1.4.7) abbiamo

$$c > f^{**}\left(s_h, \frac{1}{h}\right) - \frac{1}{h} f^{**}_-\left(s_h, \frac{1}{h}\right) \ge f^{**}(s_h,0) - \frac{1}{h}\max_{s\in[\alpha,\beta]} f^{**}(s,2).$$

Dunque, prendendo una sottosuccessione convergente $s_{h_k} \to s_0$ e passando al limite otteniamo $c \ge f^{**}(s_0,0) \ge \min_{s\in[\alpha,\beta]} f^{**}(s,0)$, in contraddizione con la scelta di c. $\square$

1.5 Un teorema di rilassamento per (P^+)

Enunciati dei risultati di esistenza per il problema vincolato convesso, ha ora senso chiedersi sotto che ipotesi è possibile, dato un minimo per il problema (P^{**}_+), costruirne uno per il problema (P^+).

In questo paragrafo assumeremo che $f : [\alpha, \beta] \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, oltre ad essere semicontinua inferiormente, come abbiamo supposto fin dall'inizio del capitolo, soddisfi anche la seguente proprieta':

(H1) $f(s, \cdot)$ è continua in 0 per ogni $s \in [\alpha, \beta]$.

Notiamo che l'ipotesi (H1) implica che, se si prende in esame l'inviluppo convesso $f^{**}(s, \cdot)$ di $f(s, \cdot)$ fatto sulla semiretta chiusa $[0, +\infty)$, questo coincide con l'inviluppo convesso fatto sulla semiretta aperta $(0, +\infty)$ e risulta essere continuo nell'origine per ogni $s \in (\alpha, \beta)$.

Sia ora definito C_s come l'insieme di contatto di $f(s, \cdot)$ in $(0, +\infty)$,

$$C_s := \{z > 0 \, : \, f(s, z) = f^{**}(s, z)\}, \qquad s \in [\alpha, \beta]. \tag{1.5.1}$$

Indicheremo con $Bd(C_s)$ la frontiera di C_s.

Teorema 1.5.1. *Sia $f : [\alpha, \beta] \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ semicontinua inferiormente e soddisfacente (H1). Il problema (P^+) ammette minimo se e solo se il problema (P^{**}_+) ammette minimo $v_0 \in \Omega^+$ tale che*

$$v_0'(t) \in co\,(C_{v_0(t)}) \;\; \textit{per q.o. } t \in A_{v_0}$$

dove A_{v_0} è definito in (1.0.2) *e $co(C_{v_0(t)})$ denota l'inviluppo convesso dell'insieme $C_{v_0(t)}$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$): Sia v_0 un minimo per il problema (P^+). In virtù del Teorema 1.3.1 si ha che v_0 soddisfa alle condizioni $(\mathrm{DBR})_1$ o $(\mathrm{DBR})_2$, a seconda della misura di B_{v_0}. Se si analizzano entrambe le condizioni, esse impongono che $v_0'(t) \in C_{v_0(t)}$ per q.o. $t \in [a, b]$, da cui segue che

$$f(v_0(t), v_0'(t)) = f^{**}(v_0(t), v_0'(t)) \text{ per q.o. } t \in [a, b]$$

e

$$\partial f(v_0(t), v_0'(t)) = \partial f^{**}(v_0(t), v_0'(t)) \text{ per q.o. } t \in [a, b].$$

Queste due condizioni implicano che v_0 soddisfa la parte sufficiente del Teorema 1.3.1 relativamente al problema (P^{**}_+), e quindi che v_0 ne è un minimo. In più si è dimostrato che $v_0'(t) \in C_{v_0(t)}$ per q.o. $t \in [a, b]$ e quindi si ottiene $v_0'(t) \in co(C_{v_0(t)})$ per q.o. $t \in [a, b]$.

($\Leftarrow$): Sia v_0 un minimo per il problema (P_+^{**}). Per il Teorema 1.1.3 si ha che $\chi_{v_0}^+$ è un minimo per il problema $(\widetilde{P_+^{**}})$. Poiché per ipotesi $v_0'(t) \in co(C_{v_0(t)})$ per q.o. $t \in A_{v_0}$, si ha che esistono due funzioni misurabili e positive $\xi_1, \xi_2 : A_{v_0} \to (0, +\infty)$, con

$$\xi_1(t), \xi_2(t) \in C_{v_0(t)}, \quad \xi_1(t) \leq v_0'(t) \leq \xi_2(t) \quad \text{q.o. in } A_{v_0},$$

e tali che $\xi_1(t) = \xi_2(t) = v_0'(t)$ quando $v_0'(t) \in C_{v_0(t)}$ e $\xi_1(t), \xi_2(t) \in Bd(C_{v_0(t)})$ altrimenti.

Non si ha problemi per la definizione di ξ_1, ξ_2, perché si è supposto che v_0 sia tale che $v_0'(t) \in co(C_{v_0(t)})$. Inoltre si ha che $f^{**}(v_0(t), \cdot)$ è affine in $[\xi_1(t), \xi_2(t)]$. Dalla proprietà (iv) del Lemma 1.0.1 si ottiene

$$(\widetilde{f})^{**}\left(v_0(t), \frac{1}{\xi_i(t)}\right) = \widetilde{(f^{**})}\left(v_0(t), \frac{1}{\xi_i(t)}\right) = \widetilde{f}\left(v_0(t), \frac{1}{\xi_i(t)}\right) \text{ q.o. in } A_{v_0},$$

per $i = 1, 2$. Si noti che per ogni $\tau \in v_0(A_{v_0})$ esiste un unico $t = v_0^{-1}(\tau) \in A_{v_0}$ tale che $v_0(t) = \tau$. Si ponga quindi $\phi_i(\tau) = \frac{1}{\xi_i(v_0^{-1}(\tau))}$ per ogni $\tau \in v_0(A_{v_0})$, $i = 1, 2$. Dal fatto che $|v_0(A_{v_0})| = \beta - \alpha$, si ottiene

$$(\widetilde{f})^{**}(\tau, \phi_i(\tau)) = \widetilde{f}(\tau, \phi_i(\tau)), \text{ q.o. in } (\alpha, \beta), i = 1, 2. \tag{1.5.2}$$

Oltretutto, dalla definizione di ϕ_1 e ϕ_2 si ha $\phi_2(\tau) \leq \chi_{v_0}'(\tau) \leq \phi_1(\tau)$, di conseguenza, esistono due funzioni misurabili $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau) : [\alpha, \beta] \to [0, 1]$ tali che $\lambda_1(\tau) + \lambda_2(\tau) = 1$ e

$$\lambda_1(\tau)\phi_1(\tau) + \lambda_2(\tau)\phi_2(\tau) = \chi_{v_0}'(\tau) \text{ q.o. in } (\alpha, \beta). \tag{1.5.3}$$

Dalla proprietà (iii) del Lemma 1.0.1, segue che $(\widetilde{f})^{**}(\tau, \cdot)$ è affine in $[\phi_2(\tau), \phi_1(\tau)]$. Si applichi ora il Teorema di Lyapunov in forma estesa, (Extended Lyapunov Theorem [16, Teorema 18, appendice]), con le funzioni

$$g_i(\tau) = (\phi_i(\tau), (\widetilde{f})^{**}(\tau, \phi_i(\tau))), i = 1, 2,$$

e come funzioni peso le λ_1, λ_2 ottenute prima. Questo teorema ci porta all'esistenza di una decomposizione di (α, β) in due insiemi misurabili disgiunti E_1, E_2 tali che, se si definisce $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \phi_1(\tau) & \text{se } \tau \in E_1 \\ \phi_2(\tau) & \text{se } \tau \in E_2, \end{cases}$$

si ottengono le seguenti due catene di uguaglianze:
sfruttando (1.5.3)

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau &= \int_{E_1}\phi_1(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{E_2}\phi_2(\tau)\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_\alpha^\beta [\lambda_1(\tau)\phi_1(\tau)+\lambda_2(\tau)\phi_2(\tau)]\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_\alpha^\beta \chi'_{v_0}(\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

e, sfruttando anche (1.5.2), il fatto che $(\widetilde{f})^{**}(\tau,\cdot)$ è affine in $[\phi_2(\tau),\phi_1(\tau)]$ e la definizione di λ_1 e λ_2,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \widetilde{f}(\tau,\varphi(\tau))\mathrm{d}\tau &= \int_{E_1}(\widetilde{f})^{**}(\tau,\phi_1(\tau))\mathrm{d}\tau + \int_{E_2}(\widetilde{f})^{**}(\tau,\phi_2(\tau))\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_\alpha^\beta [\lambda_1(\tau)(\widetilde{f})^{**}(\tau,\phi_1(\tau))+\lambda_2(\tau)(\widetilde{f})^{**}(\tau,\phi_2(\tau))]\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_\alpha^\beta (\widetilde{f})^{**}(\tau,\lambda_1(\tau)\phi_1(\tau)+\lambda_2(\tau)\phi_2(\tau))\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_\alpha^\beta (\widetilde{f})^{**}(\tau,\chi'_{v_0}(\tau))\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Si ponga ora $u_0(\tau) = a + \int_\alpha^\tau \varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma$. Si ha che $u_0 \in \widetilde{\Omega}^+$ e, per (1.5.4), $u_0(\beta) = \chi^+_{v_0}(\beta)$. Per ogni $u \in \widetilde{\Omega}^+$ si ha, usando (1.5.5) e la minimalità di $\chi^+_{v_0}(\beta)$, che

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(u_0) &= \int_\alpha^\beta \widetilde{f}(\tau,\varphi(\tau))\mathrm{d}\tau + \mu(b-u_0(\beta)) = \\ &= \int_\alpha^\beta (\widetilde{f})^{**}(\tau,\chi'_{v_0}(\tau))\mathrm{d}\tau + \mu(b-\chi_{v_0}(\beta)) = \\ &= (\widetilde{F})^{**}(\chi_{v_0}) = \widetilde{(F^{**})}(\chi_{v_0}) \leq \\ &\leq \widetilde{(F^{**})}(u) = (\widetilde{F})^{**}(u) \leq \\ &\leq \widetilde{F}(u).\end{aligned}$$

Dunque u_0 è un minimo per il problema $(\widetilde{P}^+)$ e di conseguenza, per il Teorema 1.1.3, si ha $\Psi^+_{u_0}$ è un minimo per il problema (P^+). □

Come conseguenza del teorema appena dimostrato, otteniamo il seguente corollario che ci dà delle ipotesi sotto le quali le risolubilità dei due problemi (P^+) e (P^{**}_+) sono equivalenti.

Corollario 1.5.2. *Sotto le stesse ipotesi del Teorema 1.5.1, se* $co(C_s) = (0, +\infty)$ *per ogni* $s \in [\alpha, \beta]$*, allora il problema* (P^+) *ammette soluzione se e solo se il problema* (P_+^{**}) *ammette soluzione.*

Capitolo 2

Il problema libero (P)

In questo capitolo, così come nei seguenti, intendiamo studiare il problema variazionale trattato precedentemente, ma senza che lo spazio di competizione sia limitato alle sole funzioni crescenti. Ci riferiremo a questo problema variazionale come problema (P).

In questo capitolo enunceremo i risultati ottenuti in [10] e in [11].

2.1 Preliminari

Dato I intervallo reale, limitato o illimitato, siano $\alpha, \beta \in I$, consideriamo

$$\text{minimizzare } \left\{ F(u) := \int_a^b f(u(x), u'(x))\mathrm{d}x \right\}, \quad u \in \Omega. \tag{P}$$

con

$$\Omega := \{u \in W^{1,1}(a,b) \ : \ u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta,\ u([a,b]) \subset I\}.$$

In questo capitolo, così come nel successivo, ma non nel Capitolo 4, supporremo che la funzione integranda $f : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ soddisfi

(H2) $f(s, 0) = f^{**}(s, 0)$ per ogni $s \in I$,

dove f^{**} denota l'inviluppo convesso di f rispetto alla seconda variabile, facendo attenzione al fatto che ora, a differenza di quanto capitava nel capitolo precedente, la seconda variabile varia in tutto $\mathbb{R}$ e non è più ristretta al solo $[0, +\infty)$.

Anche se in presenza di funzioni che possono non essere convesse nella seconda variabile, faremo uso del sottodifferenziale nel senso dell'Analisi Convessa

$$\partial f(s,z) := \{\xi \in \mathbb{R} \ : \ f(s,w) - f(s,z) \geq \xi(w - z) \text{ per ogni } w \in \mathbb{R}\}.$$

Come dimostrato in [9, Lemma 4.3], se $f(s,\cdot)$ è continua in 0 e soddisfa

$$f(s,0) = \min_{z\in\mathbb{R}} f(s,z) \text{ per ogni } s \in I. \tag{2.1.1}$$

allora

$$\partial_+ f(s,z) = \partial f(s,z) \quad \text{per ogni } s \in I \text{ e } z > 0, \tag{2.1.2}$$

dove $\partial_+ f(s,z)$ è il sottodifferenziale definito in (1.2.1).

Per poter assumere, senza perdere in generalità, l'ipotesi (2.1.1), supporremo la seguente condizione:

$$\text{esiste una selezione Borel-misurabile } g(s) \in \partial f^{**}(s,0) \text{ con } g \in L^1(\alpha,\beta). \tag{2.1.3}$$

Vale infatti il seguente lemma.

Lemma 2.1.1. *Sia $f : I \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ Borel-misurabile soddisfacente (H2) e (2.1.3). Allora esiste una funzione Borel-misurabile $\bar{f} : I \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ con le seguenti proprietà:*

(a) $f(s,0) = \bar{f}(s,0) = (\bar{f})^{**}(s,0)$ *per ogni* $s \in I$,

(b) $\bar{f}(s,0) = \min_{z\in\mathbb{R}} \bar{f}(s,z)$ *per ogni* $s \in I$,

(c) esiste $k \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$F(u) = \bar{F}(u) + k \textit{ per ogni } u \in \Omega$$

dove $\bar{F}(u) := \int_a^b \bar{f}(u(x), u'(x))\mathrm{d}x$.

Dimostrazione. Basta definire

$$\bar{f}(s,z) := f(s,z) - g(s)z$$

dove g è come in (2.1.3). La verifica delle proprietà è priva di difficoltà. □

Notiamo che la condizione (2.1.3) è verificata se $f^{**}(\cdot,z)$ è Borel-misurabile per ogni z e $f^{**}(s,\pm 1) \in L^1(\alpha,\beta)$. Infatti, poiché la funzione $f(\cdot,z)$ è Borel-misurabile per ogni z, la funzione

$$g(s) := \inf_{n\in\mathbb{N}} n[f^{**}(s,\frac{1}{n}) - f^{**}(s,0)]$$

è anch'essa Borel-misurabile ed è facile dimostrare che $g(s) \in \partial f^{**}(s,0)$. Inoltre, dalla positività di f,

$$-f^{**}(s,-1) \leq f^{**}(s,0) - f^{**}(s,-1) \leq g(s) \leq f^{**}(s,1) - f^{**}(s,0) \leq f^{**}(s,1)$$

e si conclude che $g \in L^1(\alpha,\beta)$.

Nel Paragrafo 2.3, Lemma 2.3.1, enunceremo una variante *continua* del Lemma 2.1.1.

2.2 Bimonotonia

Il punto centrale di questa sezione sarà quello di ridurre la classe di competizione per la ricerca del minimo. Per farlo iniziamo col definire

$$\Omega^* := \{u \in \Omega \,:\, u \,\text{verifica la seguente proprietà (*)}\} \tag{2.2.1}$$

(*) esistono $\tau_1, \tau_2 \in [a,b]$, $\tau_1 \le \tau_2$, tali che u è costante in $[\tau_1, \tau_2]$, strettamente monotona in $[a, \tau_1]$ e in $[\tau_2, b]$, con $u' \neq 0$ q.o. in $[a, \tau_1] \cup [\tau_2, b]$.

Abbiamo il seguente

Teorema 2.2.1. *Sia $f : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ una funzione Borel-misurabile tale che $f(\cdot, 0)$ è inferiormente semicontinua. Supponiamo che valgano (H2) e (2.1.3).*

Allora per ogni $u \in \Omega$ e per ogni $s_0 \in u([a,b])$ tale che $f(s_0, 0) = \min_{s \in u([a,b])} f(s, 0)$ esiste una funzione $w \in \Omega^*$ tale che $w(x) \equiv s_0$ in $[\tau_1, \tau_2] \subseteq [a,b]$ e

$$F(w) \le F(u).$$

Di conseguenza:

(i) $\inf_{\Omega} F = \inf_{\Omega^*} F$,

(ii) se (P) è risolubile, allora $\min_{\Omega} F = \min_{\Omega^*} F$.

Per dimostrare tale risultato abbiamo bisogno di enunciare, rimandando a [9] per la dimostrazione, il lemma seguente:

Lemma 2.2.2. *[9, Lemma 3.2] Sia $u : [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente continua tale che $u(c) \le u(x)$ [rispettivamente $u(c) \ge u(x)$] per ogni $x \in [c,d]$. Allora esiste una funzione assolutamente continua e crescente [decrescente] $v : [c,d] \to \mathbb{R}$ tale che $v(c) = u(c), v(d) = u(d)$ e $v(x) = u(x), v'(x) = u'(x)$ per ogni x tale che $v'(x) \neq 0$.*

Siamo ora pronti a dare la dimostrazione del teorema.

Dimostrazione del Teorema 2.2.1. Grazie al Lemma 2.1.1, possiamo supporre, senza perdere di generalità, che valga (2.1.1). Si fissino $u \in \Omega$ e $s_0 \in u([a,b])$ tale che $f(s_0, 0) = \min_{s \in u([a,b])} f(s, 0)$. Questo valore s_0 esiste grazie alla semicontinuità di $f(\cdot, 0)$. Si pongano

$$x_1 := \min\{x \in [a,b] \,:\, u(x) = s_0\}, \;\; x_2 := \max\{x \in [a,b] \,:\, u(x) = s_0\},$$

$$\xi_1 := \max\{x \in [a, x_1] \,:\, u(x) = \alpha\}, \;\; \xi_2 := \min\{x \in [x_2, b] \,:\, u(x) = \beta\}.$$

Si definisca $v : [a, b] \to u([a, b])$,

$$v(x) := \begin{cases} u(x - a + \xi_1) & \text{se } a \leq x \leq a + x_1 - \xi_1 \\ s_0 & \text{se } a + x_1 - \xi_1 \leq x \leq b + x_2 - \xi_2 \\ u(x - b + \xi_2) & \text{se } b + x_2 - \xi_2 \leq x \leq b. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Si noti che $v \in \Omega$ e $F(v) \leq F(u)$, infatti:

$$\begin{aligned} F(v) &= f(s_0, 0)[b + x_2 - \xi_2 - a - x_1 + \xi_1] + \\ &\quad + \int_a^{a+x_1\xi_1} f(u(x - a + \xi_1), u'(x - a + \xi_1))\mathrm{d}x + \\ &\quad + \int_{b+x_2-\xi_2}^{b} f(u(x - b + \xi_2), u'(x - b + \xi_2))\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^{\xi_1} f(s_0, 0)\mathrm{d}x + \int_{\xi_1}^{x_1} f(u(x), u'(x))\mathrm{d}x + \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} f(s_0, 0)\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{\xi_2} f(u(x), u'(x))\mathrm{d}x + \int_{\xi_2}^{b} f(s_0, 0)\mathrm{d}x \leq \\ &\leq \int_a^b f(u(x), u'(x))\mathrm{d}x = F(u). \end{aligned}$$

Si noti che valgono le seguenti:

$$\begin{aligned} &v(a) = \alpha, \quad v(a + x_1 - \xi_1) = s_0 \\ &\min\{\alpha, s_0\} < v(x) < \max\{\alpha, s_0\} \quad \text{per ogni } x \in (a, a + x_1 - \xi_1) \\ &v(b + x_2 - \xi_2) = s_0, \quad v(b) = \beta \\ &\min\{\beta, s_0\} < v(x) < \max\{\beta, s_0\} \quad \text{per ogni } x \in (b + x_2\xi_2, b). \end{aligned}$$

Di conseguenza, applicando il Lemma 2.2.2, si ha che esistono due funzioni assolutamente continue e monotone $w_1 : [a, a + x_1 - \xi_1] \to \mathbb{R}$, $w_2 : [b + x_2 - \xi_2, b] \to \mathbb{R}$, tali che

$$\begin{aligned} &w_1(a) = v(a) = \alpha, \quad w_1(a + x_1 - \xi_1) = v(a + x_1 - \xi_1) = s_0, \\ &w_2(b + x_2 - \xi_2) = v(b + x_2 - \xi_2) = s_0, \quad w_2(b) = v(b) = \beta. \\ &w_i = v(x) \text{ e } w_i'(x) = v'(x) \quad \text{ per ogni } x \text{ tale che } w_i'(x) \neq 0,\ i = 1, 2. \end{aligned}$$

Ora ricordandosi le definizioni in (1.1.1),(1.1.2),(1.1.7),(1.1.8) si definisca $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ così:

$$w(x) := \begin{cases} \Psi^{\pm}(\chi^{\pm}_{w_1})(x) & \text{se } a \leq x \leq a + x_1 - \xi_1 \\ s_0 & \text{se } a + x_1 - \xi_1 \leq x \leq b + x_2 - \xi_2 \\ \Psi^{\pm}(\chi^{\pm}_{w_2})(x) & \text{se } b + x_2 - \xi_2 \leq x \leq b \end{cases} \tag{2.2.3}$$

scegliendo $\Psi^+(\chi^+_{w_i})(x)$ o $\Psi^-(\chi^-_{w_i})(x)$ a seconda che w_i sia crescente o decrescente.
A questo punto è immediato verificare che $w \in \Omega^*$ e che esistono $\tau_1 \leq \tau_2$ per cui $w \equiv s_0$ in $[\tau_1, \tau_2] \supseteq [a + x_1 - \xi_1, b + x_2 - \xi_2]$, $w(x) \neq s_0$ per ogni $x \in [a, b] \setminus [\tau_1, \tau_2]$.

Per dimostrare che $F(w) \leq F(v)$ supponiamo che w_1 sia crescente. Si ponga $h(x) := \chi^+_{w_1}(w_1(x))$, $h : [a, a + x_1 - \xi_1] \to [a, \tau_1]$. Si ottine così una funzione strettamente crescente che soddisfa, grazie alla proprietà *ii*) del Lemma 1.1.1, $h'(x) = 1$ per ogni $x \in A_{w_1} := \{x \in [a, a+x_1-\xi_1] \, : \, w_1'(x) > 0\}$.
Si ponga

$$g(x) := \begin{cases} f((\chi^+_{w_1})^{-1}(x), ((\chi^+_{w_1})^{-1})'(x)) & \text{se } x \in A_{w_1} \\ 0 & \text{se } x \in [a, a + x_1 - \xi_1] \setminus A_{w_1} \end{cases}$$

Si ha così che g è una funzione non negativa e misurabile e, applicando la regola della catena per funzioni assolutamente continue e ricordando l'enunciato del Lemma 2.2.2, si ottiene

$$\begin{aligned} &\int_a^{\tau_1} f(\Psi^+(\chi^+_{w_1})(x), (\Psi^+(\chi^+_{w_1}))'(x))\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^{\tau_1} f((\chi^+_{w_1})^{-1}(x), ((\chi^+_{w_1})^{-1})'(x))\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^{\tau_1} g(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+x_1-\xi_1} g(h(t))h'(t)\mathrm{d}t = \int_{A_{w_1}} g(h(t))\mathrm{d}t = \\ &= \int_{A_{w_1}} f(w_1(t), w_1'(t))\mathrm{d}t = \int_{A_{w_1}} f(v(t), v'(t))\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Se si pone $B_{w_1} := \{x \in [a, a + x_1 - \xi_1] \, : \, w_1'(x) = 0\}$, si vede subito che $|B_{w_1}| = a + x_1 - \xi_1 - \tau_1$. Si ottiene, usando (2.2.4) e la definizione di s_0,

$$\begin{aligned} &\int_a^{a+x_1-\tau_1} f(\Psi^+(\chi^+_{w_1})(x), (\Psi^+(\chi^+_{w_1}))'(x))\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^{\tau_1} f(\Psi^+(\chi^+_{w_1})(x), (\Psi^+(\chi^+_{w_1}))'(x))\mathrm{d}x + f(s_0, 0)(a + x_1 - \xi_1 - \tau_1) \leq \\ &\leq \int_{A_{w_1}} f(v(t), v'(t))\mathrm{d}t + \int_{B_{w_1}} f(v(t), v'(t))\mathrm{d}t = \\ &= \int_a^{a+x_1-\tau_1} f(v(t), v'(t))\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Con argomenti del tutto analoghi si trattano il caso di w_1 decrescente e la casistica per w_2.

Tutto questo porta ad affermare $F(w) \leq F(v)$ dato che è ovvio che

$$\int_{a+x_1-\xi_1}^{b+x_2-\xi_2} f(w(x), w'(x))\mathrm{d}x = f(s_0, 0)(b + x_2 - \xi_2 - a - x_1 + \xi_1) \leq$$
$$\leq \int_{a+x_1-\xi_1}^{b+x_2-\xi_2} f(v(x), v'(x))\mathrm{d}x.$$

□

Si può investigare ancora un po' meglio sul tipo di monotonia che ci si aspetta dai minimi del nostro funzionale. Iniziamo definendo delle sottoclassi di Ω^*:

$$\begin{aligned}\Omega_M := \{u \in \Omega^* \quad : \quad & a < \tau_1 \leq \tau_2 < b, u'(x) < 0 \text{ q.o. in } [a, \tau_1],\\ & u'(x) = 0 \text{ q.o. in } [\tau_1, \tau_2], u'(x) > 0 \text{ q.o. in } [\tau_2, b]\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_m := \{u \in \Omega^* \quad : \quad & a < \tau_1 \leq \tau_2 < b, u'(x) > 0 \text{ q.o. in } [a, \tau_1],\\ & u'(x) = 0 \text{ q.o. in } [\tau_1, \tau_2], u'(x) < 0 \text{ q.o. in } [\tau_2, b]\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_+^+ := \{u \in \Omega^* \quad : \quad & a \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq b, u'(x) > 0 \text{ q.o. in } [a, \tau_1],\\ & u'(x) = 0 \text{ q.o. in } [\tau_1, \tau_2], u'(x) > 0 \text{ q.o. in } [\tau_2, b]\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_-^- := \{u \in \Omega^* \quad : \quad & a \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq b, u'(x) < 0 \text{ q.o. in } [a, \tau_1],\\ & u'(x) = 0 \text{ q.o. in } [\tau_1, \tau_2], u'(x) < 0 \text{ q.o. in } [\tau_2, b]\}.\end{aligned}$$

Ovviamente si ha che $\Omega^* = \Omega_M \cup \Omega_m \cup \Omega_+^+ \cup \Omega_-^-$.

Il prossimo risultato lo si deduce facilmente dalla dimostrazione del Teorema 2.2.1.

Teorema 2.2.3. *Sotto le ipotesi del Teorema 2.2.1, sia $\alpha \leq \beta$. Allora nell'enunciato del Teorema 2.2.1 la classe Ω^* può essere sostituita dalla classe $\widetilde{\Omega}$ in accordo con quanto segue:*

$$\begin{aligned} se \min_{s\in[\alpha,\beta]} f(s, 0) = \inf_{s\in I} f(s, 0) \quad &\Rightarrow \quad \widetilde{\Omega} := \Omega_+^+,\\ se \min_{s\in[\alpha,\beta]} f(s, 0) = \inf_{s\in I, s\leq\beta} f(s, 0) \quad &\Rightarrow \quad \widetilde{\Omega} := \Omega_+^+ \cup \Omega_m,\\ se \min_{s\in[\alpha,\beta]} f(s, 0) = \inf_{s\in I, s\geq\alpha} f(s, 0) \quad &\Rightarrow \quad \widetilde{\Omega} := \Omega_+^+ \cup \Omega_M.\end{aligned}$$

Si può scrivere un risultato analogo nel caso in cui $\alpha \geq \beta$ semplicemente invertendoli nell'enunciato precedente e sostituendo Ω_+^+ con Ω_-^-.

Osserviamo ora che se $u \in \Omega^*$ allora $u(x) = s_0$ in $[\tau_1, \tau_2]$, per qualche s_0, con

$$s_0 \in \{s \in u([a,b]) \, : \, f(s_0, 0) = \min_{s \in u([a,b])} f(s,0)\}.$$

Ora, nei paragrafi successivi sarà conveniente scegliere s_0 nel modo più conveniente possibile. Questo è ciò che vuol esprimere il prossimo risultato, deducibile anch'esso da un'attenta lettura della dimostrazione del Teorema 2.2.1.

Teorema 2.2.4. *Sotto le ipotesi del Teorema 2.2.1, sia $\alpha \leq \beta$. Sia $u \in \Omega$. Allora esiste $w \in \Omega^*$ soddisfacente $F(w) \leq F(u)$ e una delle seguenti:*

- $w \in \Omega_+^+$ *e* $s_0 \in \{s \in [\alpha, \beta] \, : \, f(s,0) = \min_{\sigma \in [\alpha,\beta]} f(\sigma, 0)\}$,
- $w \in \Omega_M \setminus \Omega_+^+$ *e* $s_0 = \max\{s \in w([a,b]) \, : \, f(s,0) = \min_{\sigma \in w([a,b])} f(\sigma,0)\} < \alpha$,
- $w \in \Omega_m \setminus \Omega_+^+$ *e* $s_0 = \min\{s \in w([a,b]) \, : \, f(s,0) = \min_{\sigma \in w([a,b])} f(\sigma,0)\} > \beta$,

dove s_0 è il valore assunto da w tra τ_1 e τ_2.

In particolare, se (P) è risolubile, allora esiste un minimo $w \in \Omega^*$ del problema (P) tale che vale una delle proprietà sopra elencate.

Dimostrazione. Sia $u \in \Omega$. Se esiste $\bar{s} \in [\alpha, \beta]$ tale che

$$f(\bar{s}, 0) = \min_{s \in u([a,b])} f(s,0) \tag{2.2.5}$$

allora grazie alla dimostrazione del Teorema 2.2.1 esiste $w \in \Omega_+^+$ tale che $F(w) \leq F(u)$ e, posto $s_0 = \bar{s}$, s_0 soddisfa la prima proprietà in elenco.

Se un tale $\bar{s} \in [\alpha, \beta]$ non esiste, allora dovrà esistere $\bar{s} \in u([a,b]) \setminus [\alpha, \beta]$ tale che (2.2.5) valga. Se $\bar{s} \in u([a,b]) \cap (-\infty, \alpha)$ sia

$$\begin{aligned} s_0 &= \max\{s \in u([a,b]) \cap (-\infty, \alpha] \, : \, f(s,0) = \min_{\sigma \in u([a,b])} f(\sigma,0)\} = \\ &= \max\{s \in u([a,b]) \cap (-\infty, \alpha) \, : \, f(s,0) = \min_{\sigma \in u([a,b])} f(\sigma,0)\}. \end{aligned}$$

Tale valore, per la inferiore semicontinuità di $f(\cdot, 0)$ è ben definito. Si applichi la dimostrazione del Teorema 2.2.1 alla funzione u con tale valore s_0. Allora risulterà una funzione $w \in \Omega_M \setminus \Omega_+^+$, w costante, uguale a s_0, in $[\tau_1, \tau_2]$, strettamente decrescente in $[a, \tau_1]$ e strettamente crescente in $[\tau_2, b]$ con $w' \neq 0$ in $[a, \tau_1] \cup [\tau_2, b]$. Analogamente si procede qualora $\bar{s} \in u([a,b]) \cap (\beta, +\infty)$. In questo caso, la funzione w che si otterrà apparterrà a $\Omega_m \setminus \Omega_+^+$. $\square$

Si vuole ora far risaltare il fatto che si può determinare a priori un insieme in cui si possono trovare i valori che un minimo del problema (P) può assumere nel suo tratto costante.

Si definiscano i seguenti insiemi

$$\begin{aligned}
&Q_+^+ := \{s \in [\alpha, \beta] \,:\, f(s,0) = \min_{\sigma\in[\alpha,\beta]} f(s,0)\},\\
&Q_M := \{s \in I, s < \alpha \,:\, \nexists\, \sigma \in (s, \beta] \text{ tale che } f(s,0) \geq f(\sigma,0)\},\\
&Q_m := \{s \in I, s > \beta \,:\, \nexists\, \sigma \in [\alpha, s) \text{ tale che } f(s,0) \geq f(\sigma,0)\}.
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Corollario 2.2.5. *Sotto le ipotesi del Teorema 2.2.1, siano $\alpha \leq \beta$ e $u \in \Omega$. Allora esiste $w \in \Omega^*$ tale che $F(w) \leq F(u)$ e $w \equiv s_0$ in $[\tau_1, \tau_2]$, con $s_0 \in Q_+^+ \cup Q_M \cup Q_m$.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo enunciato è una semplice applicazione del Teorema 2.2.4. □

Più precisamente si ha che una funzione w ottenuta applicando il Teorema 2.2.4 a una funzione $u \in \Omega$, soddisfa una delle seguenti:

- $w \in \Omega_+^+$ e $s_0 \in Q_+^+$,
- $w \in \Omega_M \setminus \Omega_+^+$ e $s_0 \in Q_M$,
- $w \in \Omega_m \setminus \Omega_+^+$ e $s_0 \in Q_m$.

2.3 La gabbia

Scopo di questo paragrafo è quello di restringere la nostra classe di ricerca, togliendo da Ω^* le funzioni che "passano" da certe parti di piano, cioè lo scopo è quello di eliminare dalla classe di competizione funzioni che oltrepassano certi limiti, creando così quella che chiameremo *la gabbia.*

Introduciamo le nuove ipotesi con cui lavoreremo in questa sezione:

- $f : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continua,

(H3) $\exists\, m_1 := \min_{s\in I, s\leq\beta} f(s,0)$ e $\exists\, m_2 := \min_{s\in I, s\geq\alpha} f(s,0)$,

(H4) esiste $g : I \to \mathbb{R}$ una selezione continua di $\partial f^{**}(\cdot, 0)$.

Notiamo che (H3) è ovviamente verificata se I è compatto.

Grazie ad (H4) possiamo enunciare una variante continua del Lemma 2.1.1.

Lemma 2.3.1. *Sia $f : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continua e soddisfacente (H2) e (H4). Allora la funzione $\bar{f} : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $\bar{f}(s, z) = f(s, z) - g(s)z$, è continua e soddisfa le proprietà (a), (b) e (c) in Lemma 2.1.1.*

Il primo risultato che esponiamo in questa sezione, è una variante dei risultati esposti nel paragrafo precedente nei quali si dimostrava che, sotto opportune ipotesi, è possibile diminuire lo spazio di competizione. Nel prossimo teorema, infatti, si afferma che, posti

$$s_1 := \max\{s \leq \beta, s \in I \,:\, f(s, 0) = m_1\}, \tag{2.3.1}$$

$$s_2 := \min\{s \geq \alpha, s \in I \,:\, f(s, 0) = m_2\}, \tag{2.3.2}$$

e definiti

$$l_1 := \min\{\alpha, s_1\}, \quad l_2 := \max\{\beta, s_2\},$$

allora si può cercare il minimo tra le funzioni il cui grafico è racchiuso nella striscia racchiusa tra le rette $y = l_1$ e $y = l_2$.

Teorema 2.3.2. *Sia $f : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continua, che soddisfi le ipotesi (H2),(H3) e (H4). Allora si può restringere Ω^* del Teorema 2.2.1 alla classe*

$$\Omega^*_{l_1, l_2} := \{u \in \Omega^* \,:\, u([a, b]) \subseteq [l_1, l_2]\}.$$

Notiamo che $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$ se e solo se $\min\limits_{s \in [\alpha, \beta]} f(s, 0) = \inf\limits_{s \in I} f(s, 0)$; se siamo in questo caso, in virtù del Teorema 2.2.3, il problema libero (P) si riduce al problema vincolato (P^+).

Dunque, d'ora in poi, supporremo

$$\min_{s \in [\alpha, \beta]} f(s, 0) > \inf_{s \in I} f(s, 0)$$

da cui, in particolare, $s_1 < s_2$.

Per prepararci alla costruzione della gabbia riscriviamo la condizione di Du Bois-Reymond:

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(u(x), u'(x)) - c \in u'(x)\partial f(u(x), u'(x)) \text{ q.o. in } (a, b) \tag{DBR}$$

e poniamo

$$\begin{aligned}
\Upsilon_m := \{u \in \Omega \,:\, &\exists x_0 \in [a, b] \text{ tale che } u \\
&\text{è crescente in } [a, x_0], \text{decrescente in } [x_0, b]\},\\
\Upsilon_M := \{u \in \Omega \,:\, &\exists x_0 \in [a, b] \text{ tale che } u \\
&\text{è decrescente in } [a, x_0], \text{crescente in } [x_0, b]\}.
\end{aligned}$$

Si noti che queste condizioni sono leggermente diverse da quelle degli insiemi $\Omega_m, \Omega_M, \Omega_+^+, \Omega_-^-$ definiti nella sezione precedente, nel senso che

$$\Upsilon_m \supset \Omega_m \cup \Omega_+^+ \cup \Omega_-^-,$$

$$\Upsilon_M \supset \Omega_M \cup \Omega_+^+ \cup \Omega_-^-.$$

D'ora in poi si lavorerà sempre con la seguente ipotesi, introdotta solo per semplicità di trattazione:

$$\alpha \leq \beta.$$

Questo ovviamente implica in primo luogo che nella classe Ω non vi siano funzioni decrescenti non costanti.

Sarà utile in futuro avere a disposizione le seguenti proprietà, di facile verifica.

Lemma 2.3.3. *Valgono le seguenti*

- *se* $u_1, u_2 \in \Upsilon_M$, *allora* $\max\{u_1, u_2\}$ *appartiene a* Υ_M, *inoltre se* u_2 *è crescente, allora* $\max\{u_1, u_2\}$ *è crescente.*
- *se* $u_1, u_2 \in \Upsilon_m$, *allora* $\min\{u_1, u_2\}$ *appartiene a* Υ_m.
- *se* $u_1 \in \Upsilon_M$ *e* $u_2 \in \Upsilon_m$, *allora* $\min\{u_1, u_2\}$ *appartiene a* Υ_M, $\max\{u_1, u_2\}$ *appartiene a* Υ_m, *inoltre se* u_1 *è crescente, allora* $\min\{u_1, u_2\}$ *è crescente.*

Ora affrontiamo un primo taglio alla classe Υ_M.

Proposizione 2.3.4. *Sia* $f : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *continua e soddisfacente (H2),(H3) e (H4). Sia* $u_0 \in \Upsilon_M$ *soddisfacente* (DBR), *con una costante* $c \leq f(s_1, 0)$, s_1 *come in* (2.3.1), *e si assuma* $u_0'(x) \neq 0$ *q.o. in* (a, b). *Allora* $F(u) \geq F(u_0)$ *per ogni* $u \in \Upsilon_M$ *tale che* $\min_{x\in[a,b]} u(x) \leq \min_{x\in[a,b]} u_0(x)$.

Dimostrazione. Grazie al Lemma 2.3.1 si può supporre che valga (2.1.1). Si fissi $u \in \Upsilon_M$, di modo che posti $m := \min_{x\in[a,b]} u(x)$ e $m_0 := \min_{x\in[a,b]} u_0(x)$, si abbia $m \leq m_0$. Sia $\bar{x} \in [a, b]$ tale che $u(\bar{x}) = m$ e x_0 tale che $u_0(x_0) = m_0$. Si noti che per assunzione x_0 è univocamente determinato e $u_0'(x) < 0$ q.o. in $[a, x_0]$, $u_0'(x) > 0$ q.o in $[x_0, b]$.

Si pongano $w := \chi^+_{u_{|[\bar{x},b]}}$ e $w_0 := \chi^+_{u_{0|[x_0,b]}}$, definite come in (1.1.1). Dalle proprietà della trasformazione χ^+ e $\widetilde{h}$ (si confronti il Capitolo 1) si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_{\bar{x}}^{b} f(u(x),u'(x))\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{b} f(u_0(x),u_0'(x))\mathrm{d}x \geq \\
&\geq \int_{m}^{\beta} f(\xi,\frac{1}{w'(\xi)})w'(\xi)\mathrm{d}\xi + f(s_1,0)(b-w(\beta)) - \int_{m_0}^{\beta} f(\xi,\frac{1}{w_0'(\xi)})w_0'(\xi)\mathrm{d}\xi = \\
&= \int_{m_0}^{\beta} [f(\xi,\frac{1}{w'(\xi)})w'(\xi) - f(\xi,\frac{1}{w_0'(\xi)})w_0'(\xi)\mathrm{d}\xi + \\
&\qquad + \int_{m}^{m_0} f(\xi,\frac{1}{w'(\xi)})w'(\xi)\mathrm{d}\xi + f(s_1,0)(b-w(\beta)) \geq \\
&\geq c\int_{m_0}^{\beta} [w'(\xi) - w_0'(\xi)]\mathrm{d}\xi + f(s_1,0)\int_{m}^{m_0} w'(\xi)\mathrm{d}\xi + f(s_1,0)(b-w(\beta)) = \\
&= c[w(\beta)-w_0(\beta)] - c[w(m_0)-w_0(m_0)] + \\
&\qquad + f(s_1,0)[w(m_0)-w(m)] + f(s_1,0)(b-w(\beta)) = \\
&= [f(s_1,0)-c][b-w(\beta)] + [f(s_1,0)-c][w(m_0)-w(m)] + c(x_0-\bar{x}),
\end{aligned}$$

poiché $w_0(\beta) = b, w_0(m_0) = x_0$ e $w(m) = \bar{x}$.

Per confrontare $\int_a^{\bar{x}} f(u(x),u'(x))\mathrm{d}x$ e $\int_a^{x_0} f(u_0(x),u_0'(x))\mathrm{d}x$ si applichi il seguente cambio di variabile $t := a+b-x$, per ogni $x \in [a,\bar{x}]$ e si definisca $u^*(t) := u(a+b-t)$. Si nota subito che u^* è definita in $[a+b-\bar{x},b]$, soddisfa $u^*(b) = u(a) = \alpha, u^*(a+b-\bar{x}) = u(\bar{x}) = m$, e $u^{*\prime}(t) = -u'(a+b-t) \geq 0$ q.o. in $[a+b-\bar{x},b]$. Similarmente si ponga $u_0^*(t) := u_0(a+b-t)$ per $t \in [a+b-x_0,b]$, si ottiene $u_0^*(b) = u_0(a) = \alpha, u_0^*(a+b-x_0) = u_0(x_0) = m_0$ e $u_0^{*\prime}(t) = -u_0(a+b-t) > 0$ q.o. in $[a+b-x_0,b]$.

Si consideri ora $f_*(s,\xi) := f(s,-\xi)$. E' facile verificare che $\partial f_*(s,z_0) = -\partial f(s,-z_0)$ e che $f_*(u_0^*(t),u_0^{*\prime}(t)) - c \in u_0^{*\prime}(t)\partial f_*(u_0^*(t),u_0^{*\prime}(t))$ q.o. in $[a+b-x_0,b]$. Ponendo $w^* := \chi^+_{u^*}$ e $w_0^* := \chi^+_{u_0^*}$ e con argomenti analoghi a quelli usati precedentemente, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_a^{\bar{x}} f(u(x),u'(x))\mathrm{d}x - \int_a^{x_0} f(u_0(x),u_0'(x))\mathrm{d}x = \\
&= \int_{a+b-\bar{x}}^{b} f_*(u^*(t),u^{*\prime}(t))\mathrm{d}t - \int_{a+b-x_0}^{b} f_*(u_0^*(t),u_0^{*\prime}(t))\mathrm{d}t \geq \\
&\geq [f(s_1,0)-c][b-w^*(\alpha)] + [f(s_1,0)-c][w^*(m_0)-w^*(m)] + c(\bar{x}-x_0).
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
&F(u) - F(u_0) \geq [f(s_1, 0) - c][b - w(\beta)] + \\
&+[f(s_1, 0) - c][w(m_0) - w(m)] + c(x_0 - \bar{x}) + \\
&+[f(s_1, 0) - c][b - w^*(\alpha)] + [f(s_1, 0) - c][w^*(m_0) - w^*(m)] + \\
&c(\bar{x} - x_0) \geq 0,
\end{aligned}$$

poiché $c \leq f(s_1, 0)$, $m \leq m_0$ e le funzioni w, w^* sono crescenti.

□

Con un metodo del tutto analogo si dimostra anche la seguente proposizione speculare alla precedente.

Proposizione 2.3.5. *Sia $f : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continua e soddisfacente (H2),(H3) e (H4). Sia $u_0 \in \Upsilon_m$ soddisfacente* (DBR)*, con una costante $c \leq f(s_2, 0)$, s_2 come in* (2.3.2)*, e si assuma $u_0'(x) \neq 0$ q.o. in (a, b). Allora $F(u) \geq F(u_0)$ per ogni $u \in \Upsilon_m$ tale che $\max\limits_{x\in[a,b]} u(x) \geq \max\limits_{x\in[a,b]} u_0(x)$.*

Ora, nel prossimo teorema, teorema centrale di questa sezione, stabiliremo delle condizioni sufficienti affinché si abbia una coppia di traiettorie in grado di racchiudere, nella porzione di grafico fra esse contenuta, la traiettoria che realizza il minimo. Si ha prima bisogno di definire

$$\Upsilon_{w_1,w_2} := \{u \in \Upsilon_M \cup \Upsilon_m \, : \, w_1(x) \leq u(x) \leq w_2(x) \text{ per ogni } x \in [a, b]\}, \tag{2.3.3}$$

dove $w_1, w_2 \in \Omega$ e $w_1 \leq w_2$ per ogni $x \in [a, b]$.

Teorema 2.3.6. *Sia $f : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continua e soddisfacente (H2),(H3),(H4). Siano u_1, u_2 due funzioni rispettivamente in Υ_M e Υ_m, tali che $\min\limits_{x\in[a,b]} u_1(x) = \min\{\alpha, s_1\}$ e $\max\limits_{x\in[a,b]} u_2(x) = \max\{\beta, s_2\}$. Si pongano*

$$\begin{aligned}
x_1 &:= \min\{x \in [a, b] \, : \, u_1(x) = \min\{\alpha, s_1\}\}, \\
x_2 &:= \max\{x \in [a, b] \, : \, u_1(x) = \min\{\alpha, s_1\}\}, \\
x_3 &:= \min\{x \in [a, b] \, : \, u_2(x) = \max\{\beta, s_2\}\}, \\
x_4 &:= \max\{x \in [a, b] \, : \, u_2(x) = \max\{\beta, s_2\}\}.
\end{aligned}$$

Si supponga che esistano delle costanti $k_1, k_2 \leq f(s_1, 0)$ e $k_3, k_4 \leq f(s_2, 0)$ tali che

$$f(u_1(x), u_1'(x)) - k_1 \in u_1'(x)\partial f(u_1(x), u_1'(x)) \text{ q.o. in } [a, x_1], \tag{2.3.4}$$

$$f(u_1(x), u_1'(x)) - k_2 \in u_1'(x)\partial f(u_1(x), u_1'(x)) \text{ q.o. in } [x_2, b], \tag{2.3.5}$$

$$f(u_2(x), u_2'(x)) - k_3 \in u_2'(x)\partial f(u_2(x), u_2'(x)) \text{ q.o. in } [a, x_3], \tag{2.3.6}$$

$$f(u_2(x), u_2'(x)) - k_4 \in u_2'(x)\partial f(u_2(x), u_2'(x)) \text{ q.o. in } [x_4, b]. \tag{2.3.7}$$

Infine, ponendo $w_1 := \min\{u_1, u_2\}$ *e* $w_2 := \max\{u_1, u_2\}$*, si ha che* $w_1 \in \Upsilon_M, w_2 \in \Upsilon_m$ *e*

$$\inf_{u\in\Omega} F(u) = \inf_{u\in\Upsilon_{w_1,w_2}} F(u). \tag{2.3.8}$$

Quindi, se (P) è risolubile,

$$\min_{u\in\Omega} F(u) = \min_{u\in\Upsilon_{w_1,w_2}} F(u). \tag{2.3.9}$$

Dimostrazione. Grazie al Lemma 2.3.1 si può supporre che valga (2.1.1). Proveremo per prima cosa che $u_1' \neq 0$ q.o. in $[a, x_1]$. Si assuma, per contraddizione, che $u_1'(x) = 0$ in un insieme di misura non nulla $H \subseteq [a, x_1]$. In particolare si ha che $a < x_1$ e quindi $s_1 < \alpha$.

Sia H^* il sottoinsieme di H in cui vale (2.3.4); per ipotesi si ha $|H \setminus H^*| = 0$. Si ha dunque

$$f(u_1(x), 0) = k_1 \leq f(s_1, 0) \text{ per ogni } x \in H^*$$

D'altra parte $u_1(x) \leq \beta$, e quindi $f(u_1(x), 0) \geq f(s_1, 0)$, per ogni $x \in [a, x_1]$. Da tutto ciò segue che $f(u_1(x), 0) = f(s_1, 0)$ per ogni $x \in H^*$, in contraddizione con la definizione di s_1, poiché $u_1(x) > s_1$ per ogni $x \in [a, x_1)$.

In modo similare si prova che $u_1'(x) \neq 0$ q.o. in $[x_2, b]$ e che $u_2'(x) \neq 0$ q.o. in $[a, b] \setminus (x_3, x_4)$.

Sia ora $u \in \Omega$, grazie al Teorema 2.3.2 possiamo supporre che valga $u([a, b]) \subseteq [l_1, l_2]\}$, dove $l_1 := \min\{\alpha, s_1\}$, $l_2 := \max\{\beta, s_2\}$, e $u \in\subseteq \Upsilon_M \cup \Upsilon_m$. Supponiamo che u appartenga alla classe Υ_M e si ponga

$$A := \{x \in [a, b] \ : \ u(x) < u_1(x)\}.$$

A è un insieme aperto e quindi è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti $\{(a_n, b_n)\}$, tali che $[a_n, b_n] \subseteq [a, b]\setminus(x_1, x_2)$ e $u(a_n) = u_1(a_n), u(b_n) = u_1(b_n)$. Se $(a_n, b_n) \subseteq (a, x_1)$, allora

$$s_1 \leq \min_{x\in[a_n,b_n]} u(x) \leq u(b_n) = u_1(b_n) = \min_{x\in[a_n,b_n]} u_1(x),$$

poiché $u_1(x)$ è decrescente in $[a_n, b_n]$. Analogamente si ottiene $\min\limits_{x\in[a_n,b_n]} u(x) \leq \min\limits_{x\in[a_n,b_n]} u_1(x)$ quando $(a_n, b_n) \subseteq (x_2, b)$. Applicando la Proposizione 2.3.4 in $[a_n, b_n]$ si ottiene che

$$\int_{a_n}^{b_n} f(u(x), u'(x))\mathrm{d}x \geq \int_{a_n}^{b_n} f(u_1(x), u_1'(x))\mathrm{d}x.$$

Di conseguenza, se si pone $v := \max\{u, u_1\}$, si ha che, grazie al Lemma 2.3.3, $v \in \Upsilon_M$ e

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_a^b f(u(x), u'(x))\mathrm{d}x = \sum_n \int_{a_n}^{b_n} f(u(x), u'(x))\mathrm{d}x + \\ &\quad + \int_{[a,b]\setminus A} f(u(x), u'(x))\mathrm{d}x \geq \\ &\geq \sum_n \int_{a_n}^{b_n} f(u_1(x), u_1'(x))\mathrm{d}x + \int_{[a,b]\setminus A} f(u(x), u'(x))\mathrm{d}x = F(v). \end{aligned}$$

Si prenda $w := \min\{v, u_2\}$, dal Lemma 2.3.3 si ha che $w \in \Upsilon_M \cap \Upsilon_{w_1,w_2}$. Ora, se $w(x) \equiv v(x)$ allora si ha già $F(w) = F(v) \leq F(u)$, altrimenti si pone

$$B := \{x \in [a, b] \, : \, v(x) > u_2(x)\}.$$

Ovviamente, similmente ad A, B è un insieme aperto, unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti $\{(c_n, d_n)\}$, tali che $[c_n, d_n] \subseteq [a, b] \setminus (x_3, x_4)$ e $v(c_n) = u_2(c_n), v(d_n) = u_2(d_n)$. Poiché $u_2 \in \Upsilon_m$ si ha che u_2 è crescente in ogni intervallo (c_n, d_n) e questo dice anche che $B \subseteq (a, x_3)$. Si ha anche che v è crescente in (c_n, d_n). Dal Teorema 1.3.1, unitamente a (2.1.2), applicato su (c_n, d_n), ed in virtù della (2.3.6) si ha che

$$\int_{c_n}^{d_n} f(v(x), v'(x))\mathrm{d}x \geq \int_{c_n}^{d_n} f(u_2(x), u_2'(x))\mathrm{d}x = \int_{c_n}^{d_n} f(w(x), v'(w))\mathrm{d}x,$$

di conseguenza $F(w) \leq F(v) \leq F(u)$.

Infine, se $u \in \Upsilon_m$, si definisce $v := \min\{u, u_2\}$, si ottiene dal Lemma 2.3.3 che $v \in \Upsilon_m$, applicando la Proposizione 2.3.5 si ha $F(v) \leq F(u)$. Considerando ora $w := \max\{v, u_1\}$ si ricava $w \in \Upsilon_m$ $F(w) \leq F(v) \leq F(u)$.

Quindi il teorema è dimostrato. $\square$

Come risultato del teorema appena dimostrato se esiste il minimo per il funzionale F se ne può trovare uno che appartiene a Υ_{w_1,w_2}, mentre il Teorema 2.2.1 ci dice che se ne può trovare uno appartenente a Ω^*, ma non è assolutamente detto che se ne trovi uno che verifichi entrambi i requisiti.

2.4 Un teorema di esistenza usando i problemi vincolati

Riprendiamo in mano la definizione di Ω^+ fatta in (1.0.1) e aggiungiamo della notazione

$$\begin{aligned}\Omega^+[(x,y),(p,q)] := \{&u \in W^{1,1}(x,p) : \\ &u(x) = y, u(p) = q, u'(x) \geq 0 \text{ q.o. in } (x,p)\},\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

con $x \leq p$, $y \leq q$,

$$\begin{aligned}\Omega^-[(x,y),(p,q)] := \{&u \in W^{1,1}(x,p) : \\ &u(x) = y, u(p) = q, u'(x) \leq 0 \text{ q.o. in } (x,p)\}.\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

con $x \leq p$, $y \geq q$.

Siano fissate $\gamma_1 \leq \alpha, \gamma_2 \geq \beta$, con $\gamma_1, \gamma_2 \in I$ e si definisca $D := [a,b] \times [\gamma_1, \gamma_2]$.

Si definiscano poi le funzioni $H^1, H^2 : D \to [0, +\infty)$ come segue

$$H^1(x,y) := \begin{cases} \inf\limits_{u \in \Omega^-[(a,\alpha),(x,y)]} \displaystyle\int_a^x f(u(\xi), u'(\xi)) \mathrm{d}\xi & \text{se } a < x \leq b \text{ e } \gamma_1 \leq y \leq \alpha, \\ \inf\limits_{u \in \Omega^+[(a,\alpha),(x,y)]} \displaystyle\int_a^x f(u(\xi), u'(\xi)) \mathrm{d}\xi & \text{se } a < x \leq b \text{ e } \alpha \leq y \leq \gamma_2(x), \\ 0 & \text{se } x = a. \end{cases}$$

e

$$H^2(x,y) := \begin{cases} \inf\limits_{u \in \Omega^+[(x,y),(b,\beta)]} \displaystyle\int_x^b f(u(\xi), u'(\xi)) \mathrm{d}\xi & \text{se } a \leq x < b \text{ e } \gamma_1 \leq y \leq \beta, \\ \inf\limits_{u \in \Omega^-[(x,y),(b,\beta)]} \displaystyle\int_x^b f(u(\xi), u'(\xi)) \mathrm{d}\xi & \text{se } a \leq x < b \text{ e } \beta \leq y \leq \gamma_2(x), \\ 0 & \text{se } x = b. \end{cases}$$

Infine venga definita $H : D \to [0, +\infty)$, come

$$H(x,y) := H^1(x,y) + H^2(x,y) \tag{2.4.3}$$

Abbiamo la seguente

Proposizione 2.4.1. *Sia $f : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continua. Allora H è inferiormente semicontinua in D.*

Questa proposizione viene dimostrata in [10, Teorema 5.1].

L'appesantimento di notazione e l'introduzione della funzione H li si giustificano grazie al seguente risultato, che mostra che la risolubilità di tutti i problemi vincolati i cui spazi di competizione sono le funzioni assolutamente continue e monotone aventi come punto di partenza (a, α) e come punto finale un punto della gabbia o punto iniziale un punto della gabbia e punto finale (b, β) implica la risolubilità del problema libero.

Teorema 2.4.2. *Sia $f : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continua e soddisfacente (H2),(H3) e (H4). Siano u_1, u_2 come nel Teorema 2.3.6 e si pongano $w_1 := \min\{u_1, u_2\}$, $w_2 := \max\{u_1, u_2\}$. Si assuma che tutti i seguenti problemi vincolati siano, dove è possibile definirli, risolubili*

$$(P^-)[(a, \alpha), (x, y)] \text{ e } (P^+)[(a, \alpha), (x, y)] \quad \text{per ogni } (x, y) \text{ tale che } x \in (a, b], w_1(x) \le y \le w_2(x), \tag{2.4.4}$$

$$(P^-)[(x, y), (b, \beta)] \text{ e } (P^+)[(x, y), (b, \beta)] \quad \text{per ogni } (x, y) \text{ tale che } x \in [a, b), w_1(x) \le y \le w_2(x). \tag{2.4.5}$$

Allora (P) è risolubile.

Dimostrazione. Poiché sotto le ipotesi di questo teorema si ha che le ipotesi del Teorema 2.3.6 sono soddisfatte allora si ha che $\inf_{u \in \Omega} F(u) = \inf_{u \in \Upsilon_{w_1, w_2}} F(u)$. Quindi basta provare che il secondo estremo inferiore è assunto.

Si definisca

$$D^* := \{(x, y) : x \in [a, b], w_1(x) \le y \le w_2(x)\}$$

e sia H definita come in (2.4.3), con $\gamma_1 = \min\{\alpha, s_1\}$ e $\gamma_2 = \max\{\beta, s_2\}$. Poiché D^* è compatto, la Proposizione 2.4.1 ci assicura che H assume minimo in D^*, in un punto $p^* = (x^*, y^*)$. Grazie alle ipotesi (2.4.4),(2.4.5) si ottiene che i due estremi inferiori della definizione di H^1 e H^2 sono in realtà dei minimi e che quindi esistono due funzioni u_1^*, u_2^* tali che $u_1^* \in \Omega^{\pm}[(a, \alpha), (x^*, y^*)]$, $u_2^* \in \Omega^{\pm}[(x^*, y^*), (b, \beta)]$ e che realizzano tali minimi (ovviamente vanno accordati i $+$ e i $-$ a seconda di come sono ordinati y^*, α e β).

Si ponga

$$u^*(x) := \begin{cases} u_1^*(x) & \text{se } x \in [a, x^*] \\ u_2^*(x) & \text{se } x \in [x^*, b]. \end{cases} \tag{2.4.6}$$

Ora si può senza perdere di generalità supporre che $u^* \in \Upsilon_{w_1, w_2}$, questo grazie al Teorema 2.3.6. Oltretutto si ha che $F(u^*) = \min_{(x,y) \in D^*} H(x, y)$.

Si prenda ora $v \in \Upsilon^*_{w_1,w_2}$ e sia $\hat{x}$ soddisfacente $v(\hat{x}) = \min_{x\in[a,b]} v(x)$ se $v \in \Upsilon_M$, o $v(\hat{x}) = \max_{x\in[a,b]} v(x)$ se $v \in \Upsilon_m$. Ovviamente $(\hat{x}, v(\hat{x})) \in D^*$, quindi

$$F(v) \geq H(\hat{x}, v(\hat{x})) \geq H(x^*, y^*) = F(u^*).$$

Quindi u^* è un minimo per il problema (P). $\square$

Da qui si inizia a vedere meglio lo stretto legame fra la risolubilità di problemi vincolati e il problema libero. Tale legame verrà approfondito nel capitolo successivo.

Capitolo 3

Il problema libero convesso

In questo capitolo lavoreremo sul nostro problema libero aggiungendo l'ipotesi di convessità nella seconda variabile per la funzione integranda f.
I risultati espressi in questo capitolo saranno due: il primo legherà la risolubilità del problema variazionale convesso all'esistenza di funzioni assolutamente continue che soddisfino opportune condizioni di tipo Du Bois-Reymond, mentre il secondo associerà la risolubilità del problema in esame alla possibilità di soddisfare certe disuguaglianze analoghe alla (1.4.4). Attraverso i risultati di questo capitolo e quelli del capitolo successivo si potranno ottenere risultati per il problema (P) senza ipotesi di convessità.

Per ricordarci dell'ipotesi di convessità, in maniera analoga a come fatto nel Paragrafo 1.4, scriveremo in questo capitolo f^{**} al posto di f, indicheremo con F^{**} il funzionale F in cui la funzione integranda f è sostituita da f^{**} e scriveremo (P^{**}) invece di (P) per riferirci al problema variazionale libero e convesso.

3.1 Teoremi di esistenza

Dobbiamo riprendere in considerazione alcune definizioni date nel Capitolo 1.
Supponiamo innanzitutto che valga l'ipotesi (H3) e che quindi siano definiti s_1 e s_2 come in (2.3.1) ed (2.3.2). Poniamo, come prima $l_1 := \min\{\alpha, s_1\}$, $l_2 := \max\{\beta, s_2\}$, e ci si ricordi che indicheremo con $f^{**}_-(s, z), f^{**}_+(s, z)$ rispettivamente la derivata sinistra e destra della funzione $f^{**}(s, \cdot)$ nel punto z.

Ora definiamo quattro classi di funzioni, in cui le differenze fra l'una e l'altra sono costituite dall'insieme di definizione e dal segno di alcune disuguaglianze.

- SET 1 - Per ogni coppia $(s, z) \in [l_1, \alpha] \times (-\infty, 0]$ si definiscano:

  $$g_1^-(s, z) := f^{**}(s, z) - z f_-^{**}(s, z), \;\; g_1^+(s, z) := f^{**}(s, z) - z f_+^{**}(s, z),$$

  per ogni $s \in [l_1, \alpha]$

  $$\lambda_1(s) := \inf_{z<0} g_1^-(s, z) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \;\; \Lambda_1(s) := \sup_{z<0} g_1^+(s, z) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

  e per ogni $\lambda_1(s) < y < \Lambda_1(s)$,

  $$\gamma_1^-(s, y) := -\min\{z < 0 \; : \; g_1^+(s, z) \geq y\},$$

  $$\gamma_1^+(s, y) := -\max\{z < 0 \; : \; g_1^-(s, z) \leq y\}.$$

- SET 2 - Per ogni coppia $(s, z) \in [l_1, \beta] \times [0, +\infty)$ si definiscano:

  $$g_2^-(s, z) := f^{**}(s, z) - z f_-^{**}(s, z), \;\; g_2^+(s, z) := f^{**}(s, z) - z f_+^{**}(s, z),$$

  per ogni $s \in [l_1, \beta]$

  $$\lambda_2(s) := \inf_{z>0} g_2^+(s, z) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \;\; \Lambda_2(s) := \sup_{z>0} g_2^-(s, z) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

  e per ogni $\lambda_2(s) < y < \Lambda_2(s)$,

  $$\gamma_2^-(s, y) := \max\{z > 0 \; : \; g_2^-(s, z) \geq y\},$$

  $$\gamma_2^+(s, y) := \min\{z > 0 \; : \; g_2^+(s, z) \leq y\}.$$

- SET 3 - Per ogni coppia $(s, z) \in [\alpha, l_2] \times [0, +\infty)$ si definiscano:

  $$g_3^-(s, z) := f^{**}(s, z) - z f_-^{**}(s, z), \;\; g_3^+(s, z) := f^{**}(s, z) - z f_+^{**}(s, z),$$

  per ogni $s \in [\alpha, l_2]$

  $$\lambda_3(s) := \inf_{z>0} g_3^+(s, z) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \;\; \Lambda_3(s) := \sup_{z>0} g_3^-(s, z) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

  e per ogni $\lambda_2(s) < y < \Lambda_2(s)$,

  $$\gamma_3^-(s, y) := \max\{z > 0 \; : \; g_3^-(s, z) \geq y\},$$

  $$\gamma_3^+(s, y) := \min\{z > 0 \; : \; g_3^+(s, z) \leq y\}.$$

- SET 4 - Per ogni coppia $(s, z) \in [\beta, l_2] \times (-\infty, 0]$ si definiscano:

  $$g_4^-(s,z) := f^{**}(s,z) - zf_-^{**}(s,z), \;\; g_4^+(s,z) := f^{**}(s,z) - zf_+^{**}(s,z),$$

  per ogni $s \in [\beta, l_2]$

  $$\lambda_4(s) := \inf_{z<0} g_4^-(s,z) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \;\; \Lambda_4(s) := \sup_{z<0} g_4^+(s,z) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

  e per ogni $\lambda_1(s) < y < \Lambda_1(s)$,

  $$\gamma_4^-(s,y) := -\min\{z < 0 \,:\, g_4^+(s,z) \geq y\},$$

  $$\gamma_4^+(s,y) := -\max\{z < 0 \,:\, g_4^-(s,z) \leq y\}.$$

Come fatto nel Paragrafo 1.4 le funzioni $\gamma_i^{\pm}(s,\cdot)$, $i = 1, ..., 4$, si possono estendere fino a $\lambda_i(s)$ e $\Lambda_i(s)$, in modo opportuno. Ci limiteremo qui a indicare il prolungamento nel caso $i = 1$, dato che il prolungamento negli altri casi segue in modo simile:

$$\gamma_1^-(s, \lambda_1(s)) = +\infty, \quad \gamma_1^-(s, \Lambda_1(s)) = \lim_{y \to \Lambda_1(s)^-} \gamma_1^-(s,y),$$

e

$$\gamma_1^+(s, \lambda_1(s)) = \lim_{y \to \lambda_1(s)^+} \gamma_1^+(s,y), \quad \gamma_1^+(s, \Lambda_1(s)) = 0;$$

tutto ciò quando $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}$.

Ovviamente valgono per queste funzioni lemmi analoghi al Lemma 1.4.2.

Come ultimo passo si fissino alcune costanti relative al nostro problema:

$$c_1 := \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[l_1,\alpha]} \lambda_1(s), \;\; c_2 := \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[l_1,\beta]} \lambda_2(s),$$
$$c_3 := \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[\alpha,l_2]} \lambda_3(s), \;\; c_4 := \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[\beta,l_2]} \lambda_4(s).$$

Avremo bisogno anche di un'osservazione su un'ulteriore proprietà soddisfatta dalla funzione $\bar{f}^{**}$, ottenuta da f^{**} tramite il Lemma 2.3.1.

Osservazione 3.1.1. E' facile verificare che non vi è differenza tra le funzioni $g_i^{\pm}$ generate da f^{**} e quelle analoghe definite a partire da $\bar{f}^{**}$ come nella dimostrazione del Lemma 2.3.1. Dunque anche le espressioni di $\gamma_i^{\pm}$ rimangono inalterate.

Ora abbiamo tutti gli ingredienti necessari per enunciare il seguente

Teorema 3.1.2. *Sia $f^{**} : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continua e soddisfacente (H3),(H4). Siano u_1, u_2 due funzioni rispettivamente in Υ_M e Υ_m, tali che $\min_{x \in [a,b]} u_1(x) = \min\{\alpha, s_1\}$, $\max_{x \in [a,b]} u_2(x) = \max\{\beta, s_2\}$. Si pongano*

$$\begin{aligned} x_1 &:= \min\{x \in [a,b] \,:\, u_1(x) = \min\{\alpha, s_1\}\}, \\ x_2 &:= \max\{x \in [a,b] \,:\, u_1(x) = \min\{\alpha, s_1\}\}, \\ x_3 &:= \min\{x \in [a,b] \,:\, u_2(x) = \max\{\beta, s_2\}\}, \\ x_4 &:= \max\{x \in [a,b] \,:\, u_2(x) = \max\{\beta, s_2\}\}. \end{aligned}$$

Si supponga che esistano delle costanti k_1, k_2, k_3, k_4 tali che

$$\begin{aligned} c_1 < k_1 \leq f^{**}(s_1, 0), \;\; c_2 < k_2 \leq f^{**}(s_1, 0) \\ c_3 < k_3 \leq f^{**}(s_2, 0), \;\; c_4 < k_4 \leq f^{**}(s_2, 0) \end{aligned}$$

e che verifichino

$$f^{**}(u_1(x), u_1'(x)) - k_1 \in u_1'(x) \partial f^{**}(u_1(x), u_1'(x)) \text{ q.o. in } [a, x_1], \tag{3.1.1}$$

$$f^{**}(u_1(x), u_1'(x)) - k_2 \in u_1'(x) \partial f^{**}(u_1(x), u_1'(x)) \text{ q.o. in } [x_2, b], \tag{3.1.2}$$

$$f^{**}(u_2(x), u_2'(x)) - k_3 \in u_2'(x) \partial f^{**}(u_2(x), u_2'(x)) \text{ q.o. in } [a, x_3], \tag{3.1.3}$$

$$f^{**}(u_2(x), u_2'(x)) - k_4 \in u_2'(x) \partial f^{**}(u_2(x), u_2'(x)) \text{ q.o. in } [x_4, b]. \tag{3.1.4}$$

Allora il problema (P^{**}) è risolubile.

Dimostrazione. Per il Lemma 2.3.1 e l'Osservazione 3.1.1 non è restrittivo supporre che valga (2.1.1) per la f^{**} e che continuino a valere le ipotesi (3.1.1)–(3.1.4). In particolare dal Lemma 1.4.9 si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_1^-(s, y_1)} \in L^1(l_1, \alpha), \;\; \frac{1}{\gamma_2^-(s, y_2)} \in L^1(l_1, \beta), \\ \frac{1}{\gamma_3^-(s, y_3)} \in L^1(\alpha, l_2), \;\; \frac{1}{\gamma_4^-(s, y_4)} \in L^1(\beta, l_2). \end{aligned}$$

quando $y_i \in (c_i, f^{**}(s_1, 0))$, se $i = 1, 2$, e $y_i \in (c_i, f^{**}(s_2, 0))$, se $i = 3, 4$.
Si noti che $u_{1|[a,x_1]}$, $u_{1|[x_2,b]}$, $u_{2|[a,x_3]}$, $u_{2|[x_4,b]}$ sono quattro funzioni monotone che verificano ognuna una condizione di tipo Du Bois-Reymond con costante k_i come nelle ipotesi del Teorema 1.4.8. Ora, si ponga $w_1 := \min\{u_1, u_2\}$, $w_2 := \max\{u_1, u_2\}$.

Affermiamo che tutti i problemi del tipo

$$\begin{aligned}
&(P^{**}_-)[(a,\alpha),(x,y)] \text{ per ogni}(x,y) \text{ tale che } x \in (a,b], w_1(x) \leq y \leq \alpha,\\
&(P^{**}_+)[(a,\alpha),(x,y)] \text{ per ogni}(x,y) \text{ tale che } x \in (a,b], \alpha \leq y \leq w_2(x),\\
&(P^{**}_-)[(x,y),(b,\beta)] \text{ per ogni } (x,y) \text{ tale che } x \in [a,b), w_1(x) \leq y \leq \beta,\\
&(P^{**}_+)[(x,y),(b,\beta)] \text{ per ogni } (x,y) \text{ tale che } x \in [a,b), \beta \leq y \leq w_2(x),
\end{aligned}$$

sono risolubili.
Infatti sia $D^* := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a,b) \text{ e } w_1(x) \leq y \leq w_2(x)\}$. Si scelga un punto $(x,y) \in D^*$ e si definisca $D^*_y := D^* \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$. Ovviamente D^*_y è un segmento, al più degenere, tale che $(x,y) \in D^*_y$. Siano (η_1, y), (η_2, y), con $\eta_1 \leq \eta_2$, i due estremi. Dalla costruzione fatta si ha che ognuno di questi due punti appartiene al grafico di almeno una delle due funzioni w_1, w_2. Abbiamo varie possibilità:

- *(primo caso)* $y \in [s_1, \alpha)$:

In questo caso si ha che $y = u_1(\eta_1) = u_1(\eta_2)$, con u_1 decrescente in $[a, \eta_1]$ e crescente in $[\eta_2, b]$. Quindi, per (3.1.1) e il Teorema 1.3.1, si ha che $u_{1|[a,\eta_1]}$ è un minimo per il problema $(P^{**}_-)[(a,\alpha),(\eta_1,y)]$, e, dato che (x,y) è tale che $x \geq \eta_1$, grazie al Teorema 1.4.8 si ottiene che il problema $(P^{**}_-)[(a,\alpha),(x,y)]$ è anch'esso risolubile. In modo analogo si ha che $u_{1|[\eta_2,b]}$ è un minimo per il problema $(P^{**}_+)[(\eta_2,y),(b,\beta)]$ e, dato che $x \leq \eta_2$, grazie al Teorema 1.4.8 si ottiene che il problema $(P^{**}_+)[(x,y),(b,\beta)]$ è risolubile.

- *(secondo caso)* $y \in (\beta, s_2]$:

Si tratta questo caso in modo analogo al precedente e notando che in queste assunzioni si ha $y = u_2(\eta_1) = u_2(\eta_2)$, e che u_2 è crescente in $[a, \eta_1]$ e decrescente in $[\eta_2, b]$.

- *(terzo caso)* $y \in [\alpha, \beta]$:

In questa assunzione, siamo costretti a distinguere tre sottocasi:

- $y = u_2(\eta_1) = u_1(\eta_2)$,
- $y = u_1(\eta_1) = u_2(\eta_2)$,
- $y = u_i(\eta_1) = u_i(\eta_2)$ per qualche $i \in \{1, 2\}$.

Nel primo sottocaso, u_2 è crescente in $[a, \eta_1]$ e u_1 è crescente in $[\eta_2, b]$; ricordiamo che $\eta_1 \leq x \leq \eta_2$. Da ciò, con considerazioni simili a quelle fatte nel primo caso, si ottiene che $u_{2|[a,\eta_1]}$ è un minimo per il problema $(P_+^{**})[(a, \alpha), (\eta_1, y)]$ e che $u_{1|[\eta_2,b]}$ è un minimo per il problema $(P_+^{**})[(\eta_2, y), (b, \beta)]$. Ragionando come nei casi precedenti, il Teorema 1.4.8 implica che i due problemi $(P_+^{**})[(a, \alpha), (x, y)]$ e $(P_+^{**})[(x, y), (b, \beta)]$ sono risolubili.
Se invece $y = u_1(\eta_1) = u_2(\eta_2)$, bisogna fare un ragionamento un po' più lungo. Si definisca $x_\alpha := \max\{t \in [a, b] : u_1(t) = \alpha\}$. Ovviamente $x_\alpha \leq \eta_1 \leq x$ e u_1 è crescente in $[x_\alpha, \eta_1]$. Di conseguenza $u_1(x)_{|[x_\alpha,\eta_1]}$ è un minimo per il problema $(P_+^{**})[(x_\alpha, \alpha), (\eta_1, y)]$, da cui per il Teorema 1.4.8 esiste il minimo per $(P_+^{**})[(a, \alpha), (\eta_1, y)]$. Applicando ancora il Teorema 1.4.8 si ha la risolubilità di $(P_+^{**})[(a, \alpha), (x, y)]$.
Per quanto riguarda il problema $(P_+^{**})[(x, y), (b, \beta)]$ si fanno considerazioni del tutto analoghe a quelle appena fatte, ponendo $x_\beta := \min\{t \in [a, b] : u_2(t) = \beta\}$.
L'ultimo sottocaso che ci rimane da analizzare lo si affronta con ragionamenti del tutto simili a quelli già visti nel sottocaso precedente.

Tutto ciò che è stato provato fino ad ora ci pone nelle ipotesi del Teorema 2.4.2, il quale ci assicura che (P^{**}) è risolubile. $\square$

Dunque, la risolubilità del problema (P^{**}) è essenzialmente legata alla risolubilità di quattro opportuni problemi vincolati. Richiamando alla mente il Teorema 1.4.3 si può dare un enunciato alternativo a quello precedente, in cui non si richiede l'esistenza di funzioni soddisfacenti condizioni di Du Bois-Reymond, ma la verifica di certe disuguaglianze, vedi (3.1.5)–(3.1.8).

Teorema 3.1.3. *Sia $f^{**} : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continua e soddisfacente (H3) e (H4). Si assuma $c_1, c_2 < f^{**}(s_1, 0)$ e $c_3, c_4 < f^{**}(s_2, 0)$. Se esistono $\bar{x}$ e $\hat{x}$ tali che*

$$\int_{s_1}^{\alpha} \frac{1}{\gamma_1^-(s, \check{c}_1)} \mathrm{d}s \leq \bar{x} - a, \tag{3.1.5}$$

$$\int_{s_1}^{\beta} \frac{1}{\gamma_2^-(s, \check{c}_2)} \mathrm{d}s \leq b - \bar{x}, \tag{3.1.6}$$

$$\int_{\alpha}^{s_2} \frac{1}{\gamma_3^-(s, \check{c}_3)} \mathrm{d}s \leq \hat{x} - a, \tag{3.1.7}$$

$$\int_{\beta}^{s_2} \frac{1}{\gamma_4^-(s, \check{c}_4)} \mathrm{d}s \leq b - \hat{x}, \tag{3.1.8}$$

per qualche $\check{c}_1 \in (c_1, f^{**}(s_1, 0)]$, $\check{c}_2 \in (c_2, f^{**}(s_1, 0)]$, $\check{c}_3 \in (c_3, f^{**}(s_2, 0)]$, $\check{c}_4 \in (c_4, f^{**}(s_2, 0)]$, allora (P^{**}) è risolubile.

Dimostrazione. Le ipotesi (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7) e (3.1.8), grazie al Teorema 1.4.4 implicano che sono risolubili i problemi

$$\begin{array}{ll} (P_-^{**})[(a,\alpha),(\bar{x},s_1)], & (P_+^{**})[(\bar{x},s_1),(b,\beta)], \\ (P_+^{**})[(a,\alpha),(\hat{x},s_2)], & (P_-^{**})[(\hat{x},s_2),(b,\beta)]. \end{array}$$

Siano rispettivamente v_1, v_2, v_3, v_4 le quattro funzioni ottenute tramite il Teorema 1.4.4 che risolvono i problemi appena citati. Si pongano

$$u_1(x) := \begin{cases} v_1(x) & \text{se } x \in [a,\bar{x}], \\ v_2(x) & \text{se } x \in [\bar{x},b], \end{cases} \tag{3.1.9}$$

e

$$u_2(x) := \begin{cases} v_3(x) & \text{se } x \in [a,\hat{x}], \\ v_4(x) & \text{se } x \in [\hat{x},b]. \end{cases} \tag{3.1.10}$$

Si sono ottenute così due funzioni che, per il Teorema 1.3.1 e l'osservazione 1.4.6, soddisfano le ipotesi del Teorema 3.1.2. □

Leggendo le ipotesi appena scritte, si vede in maniera ancor più chiara il legame della risolubilità del problema (P^{**}) con quella di 4 particolari problemi vincolati, e quindi sale ancora più alla luce il legame fra la risolubilità di (P^{**}) e i dati al bordo.

Capitolo 4

Rilassamento

Nel capitolo precedente abbiamo enunciato dei risultati di esistenza di minimi per il problema (P^{**}). Ora ci proponiamo di studiare sotto quali ipotesi la risolubilità di (P^{**}) implichi la risolubilità di (P). Ricordiamo che, senza perdita di generalità, supponiamo $\alpha \leq \beta$.

4.1 Preliminari

Il nostro punto di partenza è un teorema di Celada e Perrotta che noi enunceremo, per semplicità, per funzioni f a valori finiti. Prima di dare l'enunciato di tale teorema introduciamo alcune notazioni:

$$Ef^{**}(s,z) := \sup\{f^{**}(s,z) - z\partial f^{**}(s,z)\},$$

$$D := \{(s,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, f(s,z) > f^{**}(s,z)\},$$
$$D^z := D \cap (\mathbb{R} \times \{z\}).$$

Teorema 4.1.1 (Teorema 1.2 in [6]). *Siano $f, f^{**} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ continue e sia*

$$\lim_{|z|\to+\infty} \sup\{Ef^{**}(s,z) \,:\, |s| \leq R\} = -\infty \text{ per ogni } R \geq 0. \tag{4.1.1}$$

Si assumano le seguenti proprietà:

(i) per ogni $(s_0, z_0) \in D$, esiste $\delta = \delta(s_0, z_0) > 0$ tale che $[s_0 - \delta, s_0 + \delta] \subset D^{z_0}$ e tale che la restrizione di $Ef^{**}(\cdot, z_0)$ a $[s_0 - \delta, s_0 + \delta]$ è monotona in ognuno dei due intervalli $[s_0 - \delta, s_0]$ e $[s_0, s_0 + \delta]$,

(ii) se $D^0 \neq \emptyset$, la restrizione $s \in D^0 \mapsto f^{**}(s,0)$ non ha minimi locali stretti in D^0.

Se (P^{**}) *è risolubile, allora* (P) *è risolubile.*

E' importante osservare che in questo risultato non si richiede l'ipotesi (H2). Inoltre, per quel che riguarda l'ipotesi (4.1.1) osserviamo che funzioni aventi crescita superlineare la soddisfano e che, se vale (4.1.1), allora la crescita è almeno lineare. D'altra parte, ci sono esempi di funzioni a crescita lineare che sono escluse dalla suddetta ipotesi di crescita, quale ad esempio $\sqrt{1+z^2}$.

Lo scopo di questo capitolo è di utilizzare le informazioni dedotte nel capitolo 2 (in particolare la bimonotonia dei minimi) e i teoremi di rilassamento 1.5.1 e 4.1.1, per ottenerne uno meno restrittivo nelle ipotesi.

Si noti che una prima restrizione la si può ottenere anche solo attraverso i risultati del capitolo 2, dato che attraverso l'ipotesi (H3), essi ci permetterebbero di limitare le richieste all'insieme $D \cap ([\min\{s_1, \alpha\}, \max\{s_2, \beta\}] \times \mathbb{R})$, dove s_1 e s_2 sono definiti in (2.3.1) e (2.3.2), invece che a tutto D. Un'ulteriore conseguenza della proprietà di bimonotonia è che se (P^{**}) ammette minimo, ne esiste uno appartenente a Ω^*, quindi soddisfacente la proprietà $(*)$ introdotta in (2.2.1).

La nostra idea sarà quella di modificare tale minimo $u_0 \in \Omega^*$, in modo da renderlo minimo anche di (P), trattando separatemente le regioni $[a, \tau_1]$ e $[\tau_2, b]$, in cui esso è strettamente monotono, e la regione $[\tau_1, \tau_2]$, in cui assume valore costante s_0, per qualche $s_0 \in \mathbb{R}$.

4.2 Modifica nei tratti strettamente monotoni

In questo paragrafo ci dedichiamo alla modifica di un minimo $u_0 \in \Omega^*$ di (P^{**}) esclusivamente nei sui tratti strettamente monotoni, in modo da definire una funzione $\tilde{u}_0 \in \Omega^*$ che sia ancora minimo di (P^{**}), ma soddisfacente

$$f(\tilde{u}_0(x), \tilde{u}_0'(x)) = f^{**}(\tilde{u}_0(x), \tilde{u}_0'(x)) \quad \text{per q.o. } x \in [a, \tau_1] \cup [\tau_2, b]. \qquad (4.2.1)$$

Lo strumento chiave per tale modifica è il Teorema 1.5.1.

Abbiamo bisogno di definire alcuni insiemi:
per ogni $s \in I$ si pongano

$$C_s^+ := \{z > 0 \,:\, f(s,z) = f^{**}(s,z)\},$$
$$C_s^- := \{z < 0 \,:\, f(s,z) = f^{**}(s,z)\}.$$

Si indichi poi con $co(C_s^{\pm})$ gli inviluppi convessi di tali insiemi. Si definisca infine

$$C := \{(s,z) \in I \times \mathbb{R} \,:\, f(s,z) = f^{**}(s,z)\} \qquad (4.2.2)$$

che rappresenta l'insieme di contatto della funzione f.

Teorema 4.2.1. *Siano $f, f^{**} : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ inferiormente semicontinue. Sia $u_0 \in \Omega^*$ un minimo per il problema (P^{**}) e siano τ_1 e τ_2 come in* (2.2.1). *Se*

$$\begin{aligned} u_0'(x) &\in co(C^{\pm}_{u_0(x)}) \quad \textit{per q.o. } x \in [a, \tau_1], \\ u_0'(x) &\in co(C^{\pm}_{u_0(x)}) \quad \textit{per q.o. } x \in [\tau_2, b], \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

dove si sceglie $+$ o $-$ a seconda che u_0 sia crescente o decrescente.

Allora esiste $\tilde{u}_0 \in \Omega^*$ minimo per il problema (P^{**}) e soddisfacente (4.2.1).

Dimostrazione. Siano u_0, τ_1, τ_2 come in ipotesi.
Occupiamoci ora del tratto $[a, \tau_1]$. Per il fatto che u_0 è un minimo per il problema convesso, si ottiene che $u_{0|[a,\tau_1]}$ è un minimo per il problema vincolato convesso $(P^{**}_+)[(a, \alpha), (\tau_1, u_0(\tau_1))]$ (si veda il Paragrafo 1.4 per la notazione).

L'ipotesi (4.2.3) ci mette nelle ipotesi del Teorema 1.5.1. Quest'ultimo ci dà una tecnica per trovare una funzione $v_1 \in \Omega^{\pm}[(a, \alpha), (\tau_1, u_0(\tau_1))]$ (si vedano (2.4.1) e (2.4.2) per le notazioni) tale che

$$f(v_1(x), v_1'(x)) = f^{**}(v_1(x), v_1'(x)) \quad \text{per q.o. } x \in [a, \tau_1].$$

Il fatto che v_1 sia strettamente monotona lo si evince direttamente dalla dimostrazione del Teorema 1.5.1.
In maniera del tutto analoga si ottiene una funzione $v_2 \in \Omega^{\pm}[(\tau_2, u_0(\tau_2)), (b, \beta)]$ strettamente monotona e tale che

$$f(v_2(x), v_2'(x)) = f^{**}(v_2(x), v_2'(x)) \quad \text{per q.o. } x \in [\tau_2, b].$$

Se definiamo

$$\tilde{u}_0(x) := \begin{cases} v_1(x) & \text{se } x \in [a, \tau_1], \\ u_0(x) & \text{se } x \in [\tau_1, \tau_2], \\ v_2(x) & \text{se } x \in [\tau_2, b]. \end{cases}$$

tale funzione soddisfa le proprietà richieste. □

Il nostro obiettivo ora è di determinare delle ipotesi su f e u_0 ci garantiscano che le condizioni (4.2.3) siano soddisfatte.

Per ogni $s \in I$ si definiscano:

$$\Delta_s := \{z \in \mathbb{R} \,:\, f^{**}(s, z) < f(s, z)\}, \tag{4.2.4}$$

$$A^+(s) := \{z > 0 \,:\, (0, z) \subseteq \Delta_s\}, \tag{4.2.5}$$

$$A^-(s) := \{z < 0 \,:\, (z, 0) \subseteq \Delta_s\}, \tag{4.2.6}$$

$$\phi^+(s) := \begin{cases} 0 & \text{se } A^+(s) = \emptyset, \\ \sup A^+ & \text{se } A^+(s) \neq \emptyset, \end{cases} \tag{4.2.7}$$

$$\phi^-(s) := \begin{cases} 0 & \text{se } A^-(s) = \emptyset, \\ \inf A^- & \text{se } A^-(s) \neq \emptyset. \end{cases} \tag{4.2.8}$$

Vediamo subito alcune proprietà di queste funzioni.

Proposizione 4.2.2. *Siano ϕ^+ e ϕ^- come sopra, allora $\phi^+(s) = \inf(co(C_s^+))$ e $\phi^-(s) = \sup(co(C_s^-))$ per ogni $s \in I$.*

Dimostrazione. Ci limiteremo a lavorare su $\phi^+(s)$ e $\inf(co(C_s^+))$, in quanto su $\phi^-(s)$ e $\sup(co(C_s^-))$ si puòperare in modo analogo.

Si supponga $\phi^+(s) > M > \inf(co(C_s^+))$. Siccome $\phi^+(s) > M$ allora $(0, M) \subset \Delta_s$. Dunque non può essere $\inf(co(C_s^+)) < M$.
Si supponga $\phi^+(s) < M < \inf(co(C_s^+))$. Il fatto che $\phi^+(s) < M$ implica che esiste $0 < z < M$ tale che $z \notin \Delta_s$. Da ciò segue che $z \in C_s^+$, da cui $z \in co(C_s^+)$, ottenendo un assurdo. □

Proposizione 4.2.3. *Siano $f, f^{**} : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continue. Sia $s_0 \in I$ tale che $\phi^+(s_0) = 0$ o $\phi^-(s_0) = 0$, allora $(s_0, 0) \in C$*

Dimostrazione. Supponiamo che $\phi^+(s_0) = 0$. Da ciò segue che comunque scelto un intorno destro Θ di 0, esiste $\theta \in \Theta$ tale che $f(s_0, \theta) = f^{**}(s_0, \theta)$. Per continuità questo implica $f(s_0, 0) = f^{**}(s_0, 0)$.
Nello stesso modo si agisce se $\phi^-(s) = 0$. □

Per non appesantire l'esposizione, nelle proposizioni seguenti supporremo implicitamente che sia $s_0 \in int(I)$. Nel caso in cui sia $s_0 \in Bd(I)$, gli enunciati vanno modificati interpretando la dicitura *intorno di s_0* come *intorno di s_0 relativamente ad I*. Sotto tale ipotesi, le dimostrazioni subiscono delle modifiche che, essendo ovvie, non riportiamo.

Proposizione 4.2.4. *Siano $f, f^{**} : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continue. Sia $s_0 \in I$ tale che $\phi^+(s_0) > 0$ e $\phi^-(s_0) < 0$ ed esista un intorno Θ di s_0 tale che $\phi^+(\theta, 0)$ o $\phi^-(\theta, 0)$ sia uguale a 0 per ogni $\theta \in \Theta \setminus \{s_0\}$. Allora $s_0 \in C$.*

Dimostrazione. Si prenda $\theta \in \Theta \setminus \{s_0\}$, la proposizione precedente ci dice che $(\theta, 0) \in C$. Da ciò segue che $f(\theta, 0) - f^{**}(\theta, 0) = 0$ per ogni $\theta \in \Theta \setminus \{s_0\}$. Per continuità si ottiene $f(s_0, 0) - f^{**}(s_0, 0) = 0$, cioè $s_0 \in C$. □

Proposizione 4.2.5. *Siano $f, f^{**} : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continue. Sia $s_0 \in I$ tale che $(s_0, 0) \notin C$. Allora esiste un intorno Θ di s_0 tale che $\phi^+(\theta) > 0$ e $\phi^-(\theta) < 0$ per ogni $\theta \in \Theta$. In tale intorno le funzioni ϕ^+ e ϕ^- risultano rispettivamente inferiormente e superiormente semicontinue.*

Dimostrazione. Sia $(s_0, 0) \notin C$, poiché $(I \times \mathbb{R}) \setminus C$ è un aperto, si ottiene che esiste un rettangolo R_1 aperto centrato in $(s_0, 0)$, fatto interamente di punti che non appartengono all'insieme di contatto. Si può supporre $R_1 = (s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1) \times (-\epsilon, \epsilon)$ con $\delta_1, \epsilon > 0$.
La prima conseguenza di ciò è che $\phi^+(s) \geq \epsilon$, $\phi^-(s) < -\epsilon$ per ogni $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta_1)$.
Si supponga ora per contraddizione che

$$\liminf_{s \to s_0} \phi^+(s) < M < \phi^+(s_0).$$

Dal fatto che $\phi^+(s_0) > M > \epsilon$ segue che $[0, M] \subset \Delta_{s_0}$. Sempre ricordandosi che l'insieme $(I \times \mathbb{R}) \setminus C$ è un aperto, si ottiene che esiste $0 < \delta_2 \leq \delta_1$ tale che $R_2 = (s_0 - \delta_2, s_0 + \delta_2) \times [0, M]$ non ha punti in comune con C. Questo implica che per ogni $s \in (s_0 - \delta_2, s_0 + \delta_2)$ si ha $\phi^+(s) > M$ e questo crea l'assurdo.
Per quanto riguarda ϕ^-, si lavora in maniera analoga, ottenendo l'esistenza di un qualche $0 < \delta_3 \leq \delta_1$ per cui risulta che ϕ^- è superiormente semicontinua in $(s_0 - \delta_3, s_0 + \delta_3)$.
Ponendo poi $\delta := \min\{\delta_2, \delta_3\}$ e $\Theta := (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$, si ottiene un intorno di s_0 come nella tesi della proposizione. □

Introduciamo ora un'ipotesi, già introdotta in [11].

(H5) $|\{s \in [\alpha, \beta] \,:\, f^{**}(s, 0) = \mu \text{ e } \phi^+(s) > 0 \text{ o } \phi^-(s) < 0\}| = 0,$

dove $\mu := \min_{\sigma \in [\alpha,\beta]} f^{**}(\sigma, 0)$.

Si noti che, se $f^{**}(\cdot, 0)$ ha al più un'infinità numerabile di punti di minimo in $[\alpha, \beta]$, o se $\phi^{\pm}(s) \equiv 0$ in $[\alpha, \beta]$, la condizione (H5) è soddisfatta.

Lemma 4.2.6 (Lemma 4.5 in [11]). *Sia $f^{**} : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ Borel-misurabile, con $f^{**}(\cdot, 0)$ inferiormente semicontinua e si assuma che valgano (H5) e* (2.1.3). *Se (P^{**}) è risolubile, allora esiste un minimo $u_0 \in \Omega^*$ tale che*

$$\begin{aligned} &u_0'(x) \geq \phi^+(u_0(x)) \text{ per q.o. } x \in [a, b] \text{ tale che } u_0'(x) > 0, \\ &u_0'(x) \leq \phi^-(u_0(x)) \text{ per q.o. } x \in [a, b] \text{ tale che } u_0'(x) < 0. \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Dimostrazione. Poiché sotto queste ipotesi vale il Teorema 2.2.4, non è restrittivo supporre che u_0, minimo del problema (P^{**}), soddisfi una delle tre proprietà lì enunciate.
Divideremo la dimostrazione in tre casi, uno per ogni possibilità.

Si assuma dapprima che $u_0 \in \Omega_m \setminus \Omega_+^+$ e

$$s_0 = \min\{s \in u_0([a,b]) \, : \, f(s,0) = \min_{\sigma \in u_0([a,b])} f(\sigma,0)\} > \beta,$$

dove, ricordiamo, s_0 è il valore assunto da u_0 nel tratto in cui è costante, cioè in $[\tau_1, \tau_2]$.

Questo implica che $u_0'(x) > 0$ q.o. in $[a, \tau_1]$, $u_0'(x) < 0$ q.o. in $[\tau_2, b]$, e di conseguenza

$$f^{**}(u_0(x), 0) > f^{**}(s_0, 0) \text{ per ogni } x \in [a, \tau_1) \cup (\tau_2, b]. \tag{4.2.10}$$

Si osservi inoltre che la restrizione di u_0 all'intervallo $[a, \tau_1]$ è un minimo per il problema vincolato $(P_+^{**})[(a, \alpha), (\tau_1, u_0(\tau_1))]$. Quindi il Teorema 1.3.1 ci assicura che u_0 soddisfa una condizione di tipo Du Bois-Reymond in (a, τ_1), cioè

$$f^{**}(u_0(x), u_0'(x)) - c \in u_0'(x) \partial f^{**}(u_0(x), u_0'(x)) \text{ q.o. in } [a, \tau_1], \tag{4.2.11}$$

per qualche costante $c \leq f^{**}(s_0, 0)$.

Per ogni $s \in I$ esistono $q(s)$ e $m(s)$ tali che

$$f^{**}(s, z) = q(s) + m(s) z \text{ per ogni } z \in [0, \phi^+(s)].$$

Dalla precedente relazione scritta per $z = 0$ si deduce che $q(s) = f^{**}(s, 0)$.

Da (4.2.11) si deduce che esiste $c \leq f^{**}(s_0, 0)$ tale che

$$f^{**}(u_0(x), 0) + m(u_0(x)) u_0'(x) - c = u_0'(x) m(u_0(x))$$

per q.o. $x \in [a, \tau_1]$ con $u_0'(x) < \phi^+(u_0(x))$.
Da (4.2.10) si ottiene

$$f^{**}(s_0, 0) < f^{**}(u_0(x), 0) = c \leq f^{**}(s_0, 0)$$

per q.o. $x \in [a, \tau_1]$ tale che $u_0'(x) < \phi^+(u_0(x))$. Essendo ciò impossibile, deve essere

$$u_0'(x) \geq \phi^+(u_0(x)) \text{ per q.o. } x \in [a, \tau_1].$$

Con argomenti analoghi si deduce $u_0'(x) < \phi^-(u_0(x))$ per q.o. $x \in [\tau_2, b]$.

Se si assume che $u_0 \in \Omega_M \setminus \Omega_+^+$ e

$$s_0 = \max\{s \in u_0([a,b]) \, : \, f(s,0) = \min_{\sigma \in u_0([a,b])} f(\sigma,0)\} < \alpha,$$

si può lavorare come nel caso precedente e ottenere i risultati cercati.

Si assuma ora $u_0 \in \Omega_+^+$. Si può supporre

$$s_0 \in \{s \in [\alpha, \beta] \, : \, f(s, 0) = \min_{\sigma \in [\alpha,\beta]} f(\sigma, 0)\},$$

$u_0'(x) > 0$ q.o. in $[a, \tau_1]$, $u_0(x) \equiv s_0$ in $[\tau_1, \tau_2]$ e $u_0'(x) > 0$ q.o. in $[\tau_2, \beta]$. Concentriamoci ora sull'intervallo $[a, \tau_1]$ tenendo conto che per l'intervallo $[\tau_2, b]$ i ragionamenti sono analoghi.
Dalla ipotesi (H5) e dalla positività di $u_0'(x)$ q.o. in $[a, \tau_1]$, si ottiene

$$|\{x \in [a, \tau_1] \, : \, f^{**}(u_0(x), 0) = \mu \text{ e } u_0'(x) < \phi^+(u_0(x))\}| = 0.$$

Infatti, posto v_0 la restrizione di u_0 in $[a, \tau_1]$

$$\begin{aligned} &\{x \in [a, \tau_1] \, : \, f^{**}(u_0(x), 0) = \mu \text{ e } u_0'(x) < \phi^+(u_0(x))\} \subseteq \\ &\subseteq \{x \in [a, \tau_1] \, : \, f^{**}(u_0(x), 0) = \mu \text{ e } 0 < \phi^+(u_0(x))\} = \\ &= v_0^{-1}(\{s \in [\alpha, s_0] \, : \, f^{**}(s, 0) = \mu \text{ e } \phi^+(s) > 0\}). \end{aligned}$$

e quest'ultimo insieme ha misura nulla per (H5) e per l'assoluta continuità di v_0^{-1}, in quanto inversa di v_0 che è assolutamente continua e con derivata quasi ovunque positiva.

Ripetendo i discorsi fatti a partire dalla condizione di Du Bois-Reymond e sfruttando ciò che si è appena detto, si riesce a dimostrare che

$$f^{**}(s_0, 0) < f^{**}(u_0(x), 0) = c \leq f^{**}(s_0, 0)$$

per q.o. $x \in [a, \tau_1]$ tale che $u_0'(x) < \phi^+(u_0(x))$.
Quindi deve essere

$$u_0'(x) \geq \phi^+(u_0(x)) \text{ per q.o } x \in [a, \tau_1].$$

□

Introduciamo ora la seguente ipotesi

(H6) $\sup co(C_s^+) = +\infty$ e $\inf co(C_s^-) = -\infty$ per ogni $s \in I$.

Supponendo (H5) e (H6) e utilizzando il Lemma 4.2.6 e alla Proposizione 4.2.2 otteniamo il seguente risultato.

Proposizione 4.2.7. *Siano $f, f^{**} : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ inferiormente semicontinue e supponiamo che valgano (H4), (H5) e (H6). Se il problema (P^{**}) è risolubile allora esiste $u \in \Omega^*$ minimo per il problema (P^{**}) e tale che*

$$f(u(x), u'(x)) = f^{**}(u(x), u'(x)) \quad \text{per q.o. } x \in [a, \tau_1] \cup [\tau_2, b]$$

dove τ_1 e τ_2 sono gli estremi del segmento in cui u è costante.

Dimostrazione. Per il Lemma 4.2.6 esiste $u_0 \in \Omega^*$ soddisfacente le disuguaglianze (4.2.9). Per la Proposizione 4.2.2 vale che

$$u_0'(x) \geq \inf C^+_{u_0(x)} = \inf co(C^+_{u_0(x)})$$

per q.o. x in cui u_0 è strettamente crescente e

$$u_0'(x) \leq \sup C^-_{u_0(x)} = \sup co(C^-_{u_0(x)})$$

per q.o. x in cui u_0 è strettamente decrescente. Da (H6) segue che vale (4.2.3). Per il Teorema 4.2.1, esiste $u \in \Omega^*$ soddisfacente l'uguaglianza cercata. □

4.3 Modifica nel tratto costante

Dobbiamo ora occuparci di come modificare un minimo $u_0 \in \Omega^*$ del problema (P^{**}) in corrispondenza del segmento $[\tau_1, \tau_2]$ in cui è costante. Per non appesantire l'esposizione, da qui in poi supporremo implicitamente che sia $s_0 \in int(I)$. Nel caso in cui sia $s_0 \in Bd(I)$, gli enunciati vanno modificati interpretando la dicitura *intorno di* s_0 come *intorno di* s_0 *relativamente ad* I. Sotto tale ipotesi, le dimostrazioni subiscono delle modifiche che, essendo ovvie, non riportiamo.

Avremo bisogno di un lemma tecnico.

Lemma 4.3.1 (Proposizione 2.3 in [6]). *Sia* $y \in W^{1,1}(0,T)$, $t_0 \in (0,T)$ *tale che* y *è differenziabile in* t_0 *con* $y(t_0) = \eta_0$, $y'(t_0) = \xi_0$. *Siano* $a(\eta)$, $b(\eta)$: $[\eta_0 - \delta, \eta_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ *due funzioni limitate, rispettivamente semicontinue superiormente e inferiormente, tali che*

$$a(\eta) < \xi_0 < b(\eta). \tag{4.3.1}$$

Allora esistono $\epsilon_0 = \epsilon_0(t_0, \delta) > 0$, *due famiglie di sottointervalli compatti* $\{K^{\pm}_{t_0,\epsilon} : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0\}$ *di* $(0,T)$ *e due famiglie di funzioni* $\{y^{\pm}_{t_0,\epsilon} : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0\}$ *in* $W^{1,1}(0,T)$ *tali che valgono le seguenti proprietà*

- *ogni intervallo* $K^{\pm}_{t_0,\epsilon}$ *è un intorno di* t_0 *e* $\{K^{\pm}_{t_0,\epsilon} : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0\}$ *si stringe a* t_0, (4.3.2)
- $y^{\pm}_{t_0,\epsilon} = y$ *in* $[0,T] \setminus int(K^{\pm}_{t_0,\epsilon})$, (4.3.3)
- $y(t) < y^{+}_{t_0,\epsilon}(t) \leq y(t) + \epsilon$ *per ogni* $t \in int(K^{+}_{t_0,\epsilon})$, (4.3.4)
- $y(t) - \epsilon \leq y^{-}_{t_0,\epsilon}(t) < y(t)$ *per ogni* $t \in int(K^{-}_{t_0,\epsilon})$, (4.3.5)
- $|y^{\pm}_{t_0,\epsilon}(t) - \eta_0| \leq \delta$ *per ogni* $t \in K^{\pm}_{t_0,\epsilon}$, (4.3.6)
- $(y^{\pm}_{t_0,\epsilon})'(t) \in \{a(y^{\pm}_{t_0,\epsilon}), b(y^{\pm}_{t_0,\epsilon})\}$ *per q.o.* $t \in K^{\pm}_{t_0,\epsilon}$, (4.3.7)

per ogni $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Tornando al nostro problema, diamo una ipotesi per i punti $s_0 \in I$ tali che $(s_0, 0) \notin C$, dove C è definito in (4.2.2):

(H7)$_{s_0}$ (se $(s_0, 0) \notin C$): esiste $\delta > 0$ tale che $f^{**}(\cdot, 0)$ è monotona in ognuno dei due intervalli $[s_0 - \delta, s_0]$ e $[s_0, s_0 + \delta]$, non ha minimi locali stretti in $[s_0 - \delta, s_0 + \delta]$ e ϕ^+ e ϕ^- sono limitate in $[s_0 - \delta, s_0 + \delta]$.

Notiamo che la condizione di crescita (4.1.1) in Teorema 4.1.1 implica la condizione di limitatezza di ϕ^+ e ϕ^- in (H7), vedi [6, Proposizione 2.1].

Teorema 4.3.2. *Siano $f, f^{**} : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continue e supponiamo che valga (H4). Sia $u_0 \in \Omega^*$ un minimo per il problema (P^{**}) ottenuto tramite il Teorema 2.2.4 e siano τ_1 e τ_2 come in* (2.2.1)*. Sia $u_0(x) \equiv s_0$ per ogni $x \in [\tau_1, \tau_2]$, con*

$$f^{**}(s_0, 0) < f(s_0, 0),$$

e valga l'ipotesi (H7)$_{s_0}$. Allora esiste $\tilde{u}_0 \in \Omega$ minimo per il problema (P^{**}) tale che

$$f(\tilde{u}_0(x), \tilde{u}_0'(x)) = f^{**}(\tilde{u}_0(x), \tilde{u}_0'(x)) \quad \textit{per q.o. } x \in [\tau_1, \tau_2]. \tag{4.3.8}$$

Dimostrazione. Si noti questo:

$$\begin{cases} f^{**}(s, \phi^+(s)) = f(s, \phi^+(s)), \\ f^{**}(s, \phi^-(s)) = f(s, \phi^-(s)), \end{cases} \quad s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta], \tag{4.3.9}$$

mentre, la proposizione 4.2.5 e l'ipotesi (H7)$_{s_0}$, ci assicurano che ϕ^+ e ϕ^- sono limitate e rispettivamente semicontinue inferiormente e superiormente in $[s_0 - \delta, s_0 + \delta]$.
Conseguenza del Teorema 2.2.4 e dell'ipotesi (H7)$_{s_0}$ è il fatto che $f^{**}(\cdot, 0)$ è costante in almeno uno dei due intervalli $[s_0 - \delta, s_0]$ e $[s_0, s_0 + \delta]$. Si restringa δ di modo che per ogni $s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$ si abbia $(s, 0) \notin C$.
Si scelga $\tau_0 \in [\tau_1, \tau_2]$ e si applichi il Lemma 4.3.1. Si ottengono così due famiglie di intervalli $\{K^{\pm}_{\tau_0,\epsilon} : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0(\tau_0)\}$ e due famiglie di funzioni $\{y^{\pm}_{\tau_0,\epsilon} : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0(\tau_0)\}$ soddisfacenti le proprietà elencate nel lemma citato.
Se $f^{**}(\cdot, 0)$ è costante in $[s_0 - \delta, s_0]$, si ponga $K_{\tau_0,\epsilon} = K^-_{\tau_0,\epsilon}$ e $y_{\tau_0,\epsilon} = y^-_{\tau_0,\epsilon}$, mentre se $f^{**}(\cdot, 0)$ è costante in $[s_0, s_0+\delta]$, si ponga $K_{\tau_0,\epsilon} = K^+_{\tau_0,\epsilon}$ e $y_{\tau_0,\epsilon} = y^+_{\tau_0,\epsilon}$.
Ricordiamoci che, per ogni $s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$, esiste $m(s)$ tale che

$$f^{**}(s, z) = f^{**}(s, 0) + m(s)z \text{ per ogni } z \in [\phi^-(s), \phi^+(s)],$$

e quindi

$$\begin{aligned} &\int_{K_{\tau_0,\epsilon}} f^{**}(y_{\tau_0,\epsilon}(x), y'_{\tau_0,\epsilon}(x))\mathrm{d}x = \\ &= \int_{K_{\tau_0,\epsilon}} \{m(y_{\tau_0,\epsilon}(x))y'_{\tau_0,\epsilon}(x) + f^{**}(y_{\tau_0,\epsilon}(x), 0)\}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dal Teorema fondamentale del calcolo si ha che l'integrale di $m(y_{\tau_0,\epsilon}(x))y'_{\tau_0,\epsilon}(x)$ è uguale all'integrale di $m(u_0(x))u'_0(x)$, e quindi dà contributo nullo, essendo $u'_0 = 0$ in (τ_1, τ_2). Da qui segue che

$$\int_{K_{\tau_0,\epsilon}} f^{**}(y_{\tau_0,\epsilon}(x), y'_{\tau_0,\epsilon}(x))\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{K_{\tau_0,\epsilon}} f^{**}(y_{\tau_0,\epsilon}(x), 0)\mathrm{d}x = \int_{K_{\tau_0,\epsilon}} f^{**}(s_0, 0)\mathrm{d}x.$$

Pertanto le funzioni del tipo

$$u_{\tau_0,\epsilon} := \begin{cases} u_0(x) & \text{se } x \in [a, \tau_1], \\ y_{\tau_0,\epsilon}(x) & \text{se } x \in [\tau_1, \tau_2], \\ u_0(x) & \text{se } x \in [\tau_2, b], \end{cases} \tag{4.3.10}$$

sono dei minimi per il problema (P^{**}).
Si ripeta la costruzione fatta per ogni $s \in (\tau_1, \tau_2)$, quindi associamo ad ogni $s \in (\tau_1, \tau_2)$ una famiglia di sottointervalli compatti e non degeneri $\{K_{s,\epsilon} : 0 < \epsilon_0(s)\}$ contenuti in (τ_1, τ_2), e di minimi per il problema (P^{**}), $\{u_{s,\epsilon} : 0 < \epsilon_0(s)\}$.
Per loro costruzione, si ha che la famiglia di intervalli $\{K_{s,\epsilon} : 0 < \epsilon_0(s),\ s \in (\tau_1, \tau_2)\}$ è un ricoprimento di Vitali per l'insieme (τ_1, τ_2). Grazie al Teorema di ricoprimento di Vitali, si ottiene che esiste un'infinità al più numerabile di punti $s_h \in (\tau_1, \tau_2)$ e di $\epsilon_h \in (0, \epsilon_0(s_h)]$, tali che i corrispondenti intervalli $K_h := K_{s_h,\epsilon_h}$, a due a due disgiunti, ricoprono l'insieme $[\tau_1, \tau_2]$ a meno di un insieme di misura nulla. Ci si riferisca anche a $u_h := u_{s_h,\epsilon_h}$.
Si ponga

$$\tilde{u}_0(x) := u_0(x) + \sum_h [u_h(x) - u_0(x)]$$

Dobbiamo dimostrare che $\tilde{u}_0 \in W^{1,1}(a, b)$.
Come si evince dalla costruzione fatta, si ha che ci basta verificare che $\tilde{u}_0$

ristretta a $[\tau_1, \tau_2]$ appartiene a $W^{1,1}(\tau_1, \tau_2)$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\tilde{u}_0(x)| \mathrm{d}x = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left| u_0(x) + \sum_h [u_h(x) - u_0(x)] \right| \mathrm{d}x \leq \\
&\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_0(x)| \mathrm{d}x + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_h |u_h(x) - u_0(x)| \mathrm{d}x = \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_0(x)| \mathrm{d}x + \sum_h \int_{K_h} |u_h(x) - u_0(x)| \mathrm{d}x = \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2} |s_0| \mathrm{d}x + \sum_h \int_{K_h} |y_h(x) - s_0| \mathrm{d}x \leq \\
&\leq (\tau_2 - \tau_1)|s_0| + \sum_h \int_{K_h} \delta \, \mathrm{d}x = (\tau_2 - \tau_1)|s_0| + \sum_h |K_h| \delta = \\
&= (\tau_2 - \tau_1)|s_0| + (\tau_2 - \tau_1)\delta < +\infty.
\end{aligned}$$

Per verificare la sommabilità della derivata di $\tilde{u}_0$ dobbiamo ricordarci che, per ipotesi, abbiamo ϕ^+ e ϕ^- limitate in $[s_0 - \delta, s_0 + \delta]$, per cui esiste una costante reale M tale che

$$M > \max\{\phi^+(s), -\phi^-(s)\} \quad \text{per ogni } s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$$

e, inoltre, $y_h'(x) \in \{\phi^+(y_h(x)), \phi^-(y_h(x))\}$ per quasi ogni $x \in K_h$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\tilde{u}_0'(x)| \mathrm{d}x = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left| \sum_h u_h'(x) \right| \mathrm{d}x = \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left| \sum_h y_h'(x) \right| \mathrm{d}x \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_h |y_h'(x)| \mathrm{d}x = \\
&= \sum_h \int_{\tau_1}^{\tau_2} |y_h'(x)| \mathrm{d}x = \sum_h \int_{K_h} |y_h'(x)| \mathrm{d}x \leq \\
&\leq \sum_h \int_{K_h} M \, \mathrm{d}x \leq \sum_h |K_h| M = \\
&= (\tau_2 - \tau_1) M
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi che $\tilde{u}_0$ è quella che cercavamo. □

4.4 Teorema di rilassamento

Prima di enunciare il teorema principale di questo capitolo, si richiami alla mente la definizione data in (2.2.6) e il Corollario 2.2.5. Essi ci danno un'idea di quali saranno i valori s_0 assunti dai minimi di (P^{**}) appartenenti a Ω^* nell'intervallo, di estremi τ_1, τ_2, in cui sono costanti.

Teorema 4.4.1. *Siano $f, f^{**} : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continue. Supponiamo che valgano (H4),(H5),(H6) e si suppongano inoltre le seguenti proprietà:*

- *esiste $s^* \in Q_+^+$ tale che $f^{**}(s^*, 0) = f(s^*, 0)$,*
- *vale $(H7)_s$ per ogni $s \in Q_M \cup Q_m$ tale che $f^{**}(s, 0) < f(s, 0)$.*

Se (P^{**}) è risolubile, allora (P) è risolubile.

Dimostrazione. Sia u soluzione del problema (P^{**}) ottenuta tramite il Teorema 2.2.4. In particolare, esistono τ_1, τ_2 in $[a, b]$ tali che u è strettamente monotono in $[a, \tau_1]$ e $[\tau_2, b]$ e $u(x) = s_0$ in $[\tau_1, \tau_2]$.

Dal suddetto teorema, dal Corollario 2.2.5 e dal Teorema 2.2.1 possiamo distinguere tre casi:

- $u \in \Omega_+^+$ e $s_0 = s^* \in Q_+^+$,
- $u \in \Omega_M \setminus \Omega_+^+$ e $s_0 \in Q_M$,
- $u \in \Omega_m \setminus \Omega_+^+$ e $s_0 \in Q_m$.

Occupiamoci di modificare, se necessario, la funzione u in $[a, \tau_1]$ e $[\tau_2, b]$ in cui è strettamente monotona.
Grazie alla Proposizione 4.2.7 le ipotesi fatte assicurano l'esistenza di $u_0 \in \Omega^*$, minimo di (P^{**}) per cui vale (4.2.1). Vale inoltre che $u_0 = u(x) = s_0$ in $[\tau_1, \tau_2]$.

Per definizione di s_0 e per ipotesi, se $s_0 \in [\alpha, \beta]$, allora vale

$$f^{**}(u_0(x), u_0'(x)) = f^{**}(s_0, 0) = f(s_0, 0) = f(u_0(x), u_0'(x))$$

in $[\tau_1, \tau_2]$.

Dalla casistica sopra riportata, si ha che se $s_0 > \beta$ o $s_0 < \alpha$ allora $s_0 \in Q_M \cup Q_m$. Da ciò segue che abbiamo due possibilità: o $(s_0, 0) \in C$, o per il punto $(s_0, 0)$ vale l'ipotesi $(\mathrm{H7})_{s_0}$. Se siamo nel primo caso, allora poniamo $\tilde{u}_0 = u_0$, mentre, se siamo nel secondo caso, è possibile applicare il Teorema 4.2.1 alla funzione u_0 per ottenere $\tilde{u}_0$ minimo di (P^{**}), coincidente con u_0 in $[a, \tau_1] \cup [\tau_2, b]$ e che soddisfa (4.3.8). Si è ottenuta così una funzione $\tilde{u}_0$ che è minimo per il problema (P). □

Il seguente corollario è un'immediata conseguenza del teorema precedente.

Corollario 4.4.2. *Siano $f, f^{**} : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continue. Supponiamo che valgano (H3),(H4),(H5),(H6) e si suppongano inoltre le seguenti proprietà:*

- *esiste* $s^* \in Q_+^+$ *tale che* $f^{**}(s^*, 0) = f(s^*, 0)$,
- *vale (H7)*$_s$ *per ogni* $s \in (Q_M \cup Q_m) \cap [\min\{s_1, \alpha\}, \max\{s_2, \beta\}]$ *tale che* $f^{**}(s, 0) < f(s, 0)$.

Se (P^{**}) *è risolubile, allora* (P) *è risolubile.*

Per concludere diamo una giustificazione della differenza di ipotesi fatte per gli $s \in Q_+^+$ e gli $s \in Q_M \cup Q_m$ negli enunciati dei due risultati precedenti.

Proposizione 4.4.3. *Siano* $f, f^{**} : I \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *continue ed esista* $s_0 \in Q_+^+ \setminus \{\alpha, \beta\}$ *tale che* $f^{**}(s_0, 0) < f(s_0, 0)$ *e che soddisfi (H7)*$_{s_0}$. *Allora non vale (H5).*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 4.2.5, esiste un intorno Θ di s_0, tale che $\phi^+(\theta) > 0$ e $\phi^-(\theta) < 0$ per ogni $\theta \in \Theta$. Per il fatto che $s \in Q_+^+ \setminus \{\alpha, \beta\}$ e da (H7)$_{s_0}$ si ottiene che almeno uno fra i due insiemi $\{(s, 0) \, : \, s \in [s_0 - \delta, s_0]\}$, $\{(s, 0) \, : \, s \in [s_0, s_0 + \delta]\}$ è contenuto in Q_+^+. Tutto ciò implica che non può valere l'ipotesi (H5). $\square$

Ringraziamenti

Molte sono le persone da ringraziare per la realizzazione di questa Tesi.
Innanzitutto vorrei ringraziare il Dottor Giovanni Cupini, che mi ha avvicinato alla materia, ma che, soprattutto, ha avuto la pazienza di seguirmi durante tutta la realizzazione di questo lavoro. Gli devo molto.
Gli “amici dell’Università“, che hanno reso indimenticabili questi cinque anni passati insieme.
Michele, già citato in quanto “amico dell’Università“, ma che merita una mensione speciale per la profonda amicizia che ci lega.
Fabio, Gabriele, Giacomo, Marco, Mirko e Simone, gli amici di una vita.
La mia famiglia, nel senso più ampio del termine, che va dai parenti di “sangue“ a quelli che lo sono diventati per il bene che mi vogliono.
Chiara, per tutto l’amore che mi dà.
Mia madre, mio padre, mio zio e mia zia, sperando che siano tutti fieri di me.

Grazie a tutti.

Bibliografia

[1] L. Ambrosio, O. Ascenzi, G. Buttazzo: Lipschitz regularity for minimizers of integral functionals with highly discontinuous integrands, *J. Math. Anal. Appl.* **142** (1989), 301-316.

[2] B. Botteron, B. Dacorogna: Existence of solutions for a variational problem associated to models in optimal foraging theory, *J. Math. Anal. Appl.* **147** (1990), 263-276.

[3] B. Botteron, B. Dacorogna: Existence and nonexistence results for noncoercive variational problems and applications in ecology, *J. Differential Equations* **85** (1990), 214-235.

[4] B. Botteron, P. Marcellini: A general approach to the existence of minimizers of one-dimensional noncoercive integrals of the calculus of variations, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **8** (1991), 197-223.

[5] G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt: *One-dimensional variational problems: an introduction,* Oxford Science Publications, 1998.

[6] P. Celada, S. Perrotta: Existence of minimizers for nonconvex, noncoercive simple integrals, *SIAM J. Control Optim.* **41** (2002), 1118-1140.

[7] A. Cellina, A. Ferriero: Existence of Lipschitzian solutions to the classical problem of the calculus of variations in the autonomous case, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **20** (2003), 911-919.

[8] F.H. Clarke: An Indirect Method in the Calculus of Variations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **336** (1993), 655-673.

[9] G. Cupini, M. Guidorzi, C. Marcelli: Necessary conditions and non-existence results for autonomus nonconvex variational problems, *J. Differential Equations,* **243** (2007), 329-348.

[10] G. Cupini, M. Guidorzi, C. Marcelli: Existence of minimizer of free autonomous problems via solvability of constrained ones, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire,* (2008), doi: 10.1016/j.anihpc.2008.06.006.

[11] G. Cupini, C. Marcelli: Monotonicity properties of minimizers and relaxation for autonomous variational problems, *Università Politecnica delle Marche, preprint 1* (2008).

[12] B. Dacorogna: *Introduction to the calculus of variations,* Imperial College Press, 2004.

[13] N. Fusco, P. Marcellini, A. Ornelas: Existence of minimizers for some nonconvex one-dimensional integrals, *Port. Math.* **55** (1998), 167-185.

[14] O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Ural'tseva: *Linear and Quasilinear Elliptic Equations,* Mathematics in Science and Engineering 46, Academic Press, New York - London, 1968.

[15] C. Marcelli: Variational problems with nonconvex, noncoercive, highly discontinuous integrands: characterization and existence of minimizers, *SIAM J. Control Optim.* **40** (2002), 1473-1490.

[16] C. Marcelli: Necessary and sufficient conditions for optimality of nonconvex, noncoercive autonomous variational problems with constraints, *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (2008), 5201-5227.

[17] C. Marcelli, E. Outkine, M. Sychev: Remarks on necessary conditions for minimizers of one-dimensional variational problems, *Nonlin. Anal.* **48** (2002), 979-993.

[18] P. Marcellini: Alcune osservazioni sull'esistenza del minimo di integrali del calcolo delle variazioni senza ipotesi di convessità, *Rend. Mat.* **13** (1980), 271-281.

[19] E. Mascolo, R. Schianchi: Existence theorems for nonconvex problems, *J. Math. Pures Appl.* **62** (1983), 349-359.

[20] A. Ornelas: Existence of scalar minimizers for nonconvex simple integrals of sum type, *J. Math. Anal. Appl.* **221** (1998), 559-573.

[21] A. Ornelas: Existence and regularity for scalar minimizers of affine nonconvex simple integrals, *Nonlinear Anal.* **53** (2003), 441-451

[22] A. Ornelas: Existence of scalar minimizers for simple convex integrals with autonomous Lagrangian measurable on the state variable, *Nonlinear Anal.* **67** (2007), 2485-2496.

[23] J.P. Raymond: Existence and uniqueness results for minimization problems with nonconvex functionals, *J. Optim. Theory Appl.* **82** (1994), 571-592.

[24] G.Talenti: *Calcolo delle Variazioni,* Quaderni dell'Unione Matematica Italiana 2, 1977.