

Cobordismo alla Pontryagin ed il Teorema di Hopf

Massimiliano Bianchini

Relatore: Graziano Gentili

27 Settembre 2006

Indice

1	Grado modulo 2 e grado di Brouwer	3
1.1	Preliminari	3
1.2	Il grado modulo 2 di una mappa	5
1.3	Il grado di Brouwer	7
2	Cobordismo alla Pontryagin e teorema di Hopf	10
2.1	La costruzione di Pontryagin	10
2.2	Il teorema di Hopf	15

Introduzione

In questo lavoro affronteremo il problema della divisione in classi di omotopia delle mappe lisce.

Il percorso che seguiremo sarà composto essenzialmente di due passi:

- la definizione del *grado modulo due* e del *grado di Brouwer*,
- la definizione della costruzione del *cobordismo alla Pontryagin*. La comprensione di questi strumenti ci porterà alla fine di questo percorso che è rappresentata dalla dimostrazione del *Teorema di Hopf*, strumento che permette di definire tutte e sole le classi di omotopia per le funzioni lisce da varietà compatte, senza bordo e di dimensione p in S^p .

Capitolo 1

Grado modulo 2 e grado di Brouwer

1.1 Preliminari

Definizione 1. Sia f una mappa liscia (o, equivalentemente, differenziabile o C^∞) fra M ed N , due varietà differenziabili di dimensione rispettivamente m ed n . Si definisce punto critico per la funzione f un elemento $x \in M$ tale che df_x ha rango minore di n ; si definisce invece punto regolare un elemento $x \in M$ tale che il rango di df_x è proprio n .

Se C è l'insieme di tutti i punti critici, allora $f(C)$ è definito insieme dei valori critici, mentre il suo complementare in N è definito insieme dei valori regolari.

Lemma 1. Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia fra due varietà differenziabili di dimensione m ed n , con $m \geq n$ e $y \in N$ un suo valore regolare. Allora $f^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione $m - n$.

Dimostrazione. Sia $x \in f^{-1}(y)$. poiché y è un valore regolare per f si ha che df_x mappa suriettivamente TM_x in TN_y .

Sia $X \subset TM_x$ il kernel di tale applicazione. Risulta ovvio che X ha dimensione $m - n$.

Immergiamo M in $\mathbb{R}^k$ e sia $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ una mappa lineare tale che sia non singolare su X .

Definiamo $F : M \rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$ come segue:

$$F(\zeta) = (f(\zeta), L(\zeta)).$$

È facile vedere che $dF_x(v) = (df_x(v), L(v))$, ed è immediato verificare che dF_x è non singolare.

Da ciò deriva che $\exists U$ intorno di x in M che viene mappato diffeomorficamente in V , intorno di $(y, L(x))$ in $N \times \mathbb{R}^{m-n}$.

Tramite F , $f^{-1}(y)$ viene mappata nell'iperpiano $y \times \mathbb{R}^{m-n}$, e di conseguenza $f^{-1}(y) \cap U$ viene mappato diffeomorficamente in $(y \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$.

Queso prova che $f^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione $m - n$. □

Una prima applicazione di questo lemma è quella di notare che, se la funzione $f : M \rightarrow N$ opera su varietà di medesima dimensione con M compatta, allora

$f^{-1}(y)$ è rappresentato da un insieme costituito da un numero finito di elementi. Ciò ci permette di definire, almeno in questo caso speciale, $\sharp f^{-1}(y)$ come la cardinalità di questa retroimmagine.

Segue immediatamente dal Lemma 1 il seguente

Corollario 1. *Sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ una mappa liscia. Allora l'insieme dei punti di $x \in M$ per cui $g(x) \geq 0$ è una varietà n -differenziabile con bordo uguale a $g^{-1}(0)$.*

Questo semplice corollario, la cui dimostrazione non verrà qui riportata, interviene nella dimostrazione del

Lemma 2. *Consideriamo una mappa liscia $f : M \rightarrow N$ da una m -varietà con bordo in una n -varietà. Se $y \in N$ è un valore regolare per f e per la restrizione $f|_{\partial M}$, allora $f^{-1}(y)$ è una $(m-n)$ -varietà differenziabile con bordo. Tale bordo è precisamente uguale all'intersezione fra $f^{-1}(y)$ e ∂M .*

Dimostrazione. Per provare questa proprietà, data la natura degli oggetti in esame, è sufficiente riportarsi al caso particolare di una mappa $f : \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con valore regolare $y \in \mathbb{R}^n$ dove $\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m | x_m \geq 0\}$

Sia $x \in f^{-1}(y)$ un punto interno; allora segue subito che $f^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile in un intorno di x .

Supponiamo ora che x sia un punto di frontiera e U un intorno di x in $\mathbb{H}^m$. Prendiamo una mappa liscia $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ che coincida con f su $U \cap \mathbb{H}^m$. Scegliamo U di modo che non contenga punti critici per g (grazie all'ipotesi fatte sulle mappe possiamo sempre farlo). Segue che $g^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione $m - n$.

Sia $\pi : g^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$ la proiezione sull'ultima coordinata

$$\pi(x_1, \dots, x_m) = x_m.$$

Chiaramente 0 è un valore regolare per π . Lo spazio tangente a $g^{-1}(y)$ in un punto $x \in \pi^{-1}(0)$ è uguale al kernel di

$$dg_x = df_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n;$$

ma per le ipotesi fatte su $f|_{\partial \mathbb{H}^m}$ questo spazio non può essere completamente contenuto in $\mathbb{R}^{m-1} \times 0$.

Di conseguenza l'insieme $g^{-1}(y) \cap \mathbb{H}^m = f^{-1}(y) \cap U$, che è costituito da tutti gli $x \in g^{-1}(y)$ con $\pi(x) \geq 0$, risulta essere, come afferma il lemma precedente, una varietà differenziabile con bordo uguale a $\pi^{-1}(0)$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Lemma 3. *Siano y e z due arbitrari punti interni di una varietà differenziabile connessa N di dimensione n . Allora esiste un diffeomorfismo $h : N \rightarrow N$ che è differenziabilmente isotopo alla mappa identica e tale che manda y in z .*

Dimostrazione. Il primo passo della dimostrazione è quello di costruire una isotopia liscia da $\mathbb{R}^n$ in se stesso che:

- 1) lasci tutti i punti fuori della palla unitaria fissi,
- 2) muova l'origine in un punto stabilito della palla unitaria.

Sia $\varphi(x)$ una funzione che soddisfa:

- 1) $\varphi(x) > 0$ se $\|x\| < 1$

2) $\varphi(x) = 0$ se $\|x\| \geq 1$
(per esempio sia $\varphi(x) = \lambda(1 - \|x\|^2)$, dove $\lambda(t) = 0$ per $t \leq 0$ e $\lambda(t) = \exp(-t^{-1})$ per $t > 0$.)

Scegliamo un vettore $c \in S^{n-1}$ e consideriamo le equazioni differenziali

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i \varphi(x_1, \dots, x_n); i = 1, \dots, n.$$

Per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ queste equazioni hanno un'unica soluzione $x = x(t)$, definita per ogni valore reale, e che soddisfa $x(0) = \bar{x}$.

Useremo ora la notazione $x(t) = F_t(\bar{x})$. Chiaramente accade ciò che segue:

1) $F_t(\bar{x})$ è definita per ogni t e $\bar{x}$, e dipende in modo differenziabile da $\bar{x}$ e da t ,

2) $F_0(\bar{x}) = \bar{x}$,

3) $F_{s+t}(\bar{x}) = F_s \circ F_t(\bar{x})$.

Segue che F_t è un diffeomorfismo da $\mathbb{R}^n$ in se stesso. Fissato t , F_t è differenziabilmente isotopa all'identità, secondo un'isotopia che fissa tutti gli elementi fuori dalla palla unitaria. Scegliendo opportunamente c e t , si può muovere l'origine in ogni punto della palla unitaria.

Consideriamo ora la varietà differenziabile N . Chiamiamo due punti *isotopici* se esiste un'isotopia liscia che manda l'uno nell'altro. Chiaramente l'isotopia tra punti è una relazione di equivalenza. Se y è un punto interno di N , esso ha un intorno aperto diffeomorfo ad $\mathbb{R}^n$, e, per le ragioni espresse prima, dentro di esso possiamo trovare un intorno aperto di y composto solo di punti a lui isotopici. ciò implica che le classi di isotopia dei punti di N sono degli aperti che partizionano N , ma N è connessa e ciò implica che esiste un'unica classe di isotopia. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

L'ultimo passo preliminare che manca adesso per poter affrontare la definizione del grado modulo 2 di una mappa liscia fra due varietà della stessa dimensione è l'enunciazione del

Teorema 1 (Teorema di Sard). *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa liscia, definita su U aperto di $\mathbb{R}^m$, e sia C l'insieme dei punti critici di f . Allora $f(C)$ ha misura zero secondo Lebesgue.*

Di questo importante risultato di analisi non riporteremo la dimostrazione.

1.2 Il grado modulo 2 di una mappa

Lemma 4. *Siano $f, g : M \rightarrow N$ due funzioni differenziabilmente omotope fra varietà della stessa dimensione, e sia M senza bordo. Se $y \in N$ è un valore regolare per entrambe, allora accade che $\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod{2}$.*

Dimostrazione. Sia $f : M \times [0; 1] \rightarrow N$ la funzione che realizza l'omotopia. Supponiamo ora che y sia un valore regolare anche per F . Da ciò deriva che $F^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione 1 con bordo, e tale bordo è costituito dall'insieme $F^{-1}(y) \cap [(M \times 0) \cup (M \times 1)]$. Questo insieme è uguale all'insieme $[(f^{-1}(y) \times 0) \cup (g^{-1}(y) \times 1)]$. poiché $F^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione 1, ciò implica che il numero dei punti di bordo è pari, da cui

$$\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y) \equiv 0 \pmod{2},$$

e segue immediatamente

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \mod 2$$

Supponiamo ora che y sia un valore critico per F . poiché y è un valore regolare per f e g risultano ben definite $\#f^{-1}(y)$ e $\#g^{-1}(y)$ ed è semplice notare che esse sono due costanti locali per le due funzioni. Siano V_1 e V_2 i due intorni di y in cui rispettivamente $\#f^{-1}(y)$ e $\#g^{-1}(y)$ sono costanti, e sia V la loro intersezione. Sia $z \in V$ valore regolare per F (z esiste perché una delle prime applicazioni del *Teorema di Sard* è quella di dimostrare che l'insieme dei valori regolari per una funzione liscia è denso nel codominio). Da cui:

$$\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z) \equiv \#g^{-1}(z) = \#g^{-1}(y) \mod 2$$

e perciò

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \mod 2$$

□

Lemma 5. *Sia $f : M \rightarrow N$ una funzione liscia fra due varietà differenziabili della stessa dimensione, con M senza bordo e N connessa, allora, se $y, z \in N$ sono entrambi valori regolari per f , abbiamo che $\#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z) \mod 2$.*

Dimostrazione. Sia $h : N \rightarrow N$ un diffeomorfismo di N in se stessa che sia isotopo alla mappa identica e che mappi y in z (il lemma 3 ne assicura l'esistenza). Facile da vedere è che z risulta essere un valore regolare per $h \circ f$ e che tale composizione è liscia isotopica ad f . Il lemma 4 afferma che

$$\#(h \circ f)^{-1}(z) \equiv \#f^{-1}(z) \mod 2$$

ma

$$(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ h^{-1}(z) = f^{-1}(y)$$

da cui otteniamo

$$\#f^{-1}(z) \equiv \#f^{-1}(y) \mod 2$$

.

□

Il lemma 5 afferma che, modulo due, la cardinalità della retroimmagine di un punto regolare non dipende dalla scelta del punto ma solo dalla funzione in esame, ed è questo fatto che ci permette di definire il *grado modulo 2* di una funzione come segue:

$$\deg_2(f) = \#f^{-1}(y) \mod 2$$

dove y è un qualsiasi valore regolare per f .

Ora arrivati fino a qui è facile capire l'utilità della definizione del grado modulo 2 di una funzione liscia $f : M \rightarrow N$ fra due varietà differenziabili della stessa dimensione, con M senza bordo e N connessa, in quanto

Teorema 2. *Il grado modulo due è un'invariante omotopica di una funzione.*

Dimostrazione. Sia g una funzione omotopa ad f e sia $y \in N$ un punto regolare per entrambe (y esiste per un'applicazione del *Teorema di Sard*), da cui $\deg_2(f) = \#f^{-1}(y) \mod 2$, e $\deg_2(g) = \#g^{-1}(y) \mod 2$. Il lemma 4 afferma che $\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \mod 2$, da cui $\deg_2(f) = \deg_2(g)$

□

Una prima e semplice applicazione dei risultati raggiunti può essere rappresentata dalla seguente

Proposizione 1. *La mappa identica su di una varietà differenziabile compatta e senza bordo non può essere omotopa ad una mappa costante.*

Dimostrazione. Il fatto è ovvio, in quanto la mappa identica ha grado dispari e la mappa costante ha grado pari. □

A partire da questa proposizione possiamo ridimostrare un altro importante risultato: *non esistono mappe lisce $f : D^{n+1} \rightarrow S^n$ che fissano i punti della sfera S^n* ; in quanto, se esistessero, potrei definire $F : S^n \times [0; 1] \rightarrow S^n$ dove $F(x, t) = f(xt)$.
ciò darebbe un'omotopia fra una mappa identica e una mappa costante.

Ora, acquisendo quest'ultimo risultato, abbiamo gli strumenti per dimostrare il

Teorema 3 (Teorema del punto fisso). *Ogni funzione continua $f : D^n \rightarrow D^n$ ha un punto fisso.*

Omettiamo la dimostrazione.

1.3 Il grado di Brouwer

Per introdurre il *grado di Brouwer* dobbiamo prima definire il concetto di *orientazione*.

Un'orientazione per uno spazio vettoriale di dimensione finita è una classe di equivalenza definita come segue: una base ordinata $(b_1, \dots, b_n)$ ha la stessa orientazione della base $(b'_1, \dots, b'_n)$ se $b'_i = \sum a_{ij} b_j$ con $\det(a_{ij}) > 0$.

Una varietà differenziabile connessa *orientabile* consiste in una varietà M con una scelta di orientazione per ogni spazio tangente TM_x . Se $m \geq 1$ per ogni punto di M deve esistere un intorno $U \subset M$ ed un diffeomorfismo h che mappi U in un insieme aperto di $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{H}^m$ che *preservi l'orientazione*, nel senso che per ogni $x \in U$ l'isomorfismo dh_x mandi la specifica orientazione di TM_x nell'orientazione standard di $\mathbb{R}^m$.

Se M ha frontiera bisogna distinguere 3 classi di vettori tangenti per i punti $x \in \partial M$:

- 1) i vettori tangenti alla frontiera, i quali formano un sottospazio vettoriale di dimensione $(m - 1)$, $T(\partial M)_x \subset TM_x$.
- 2) i vettori che *puntano fuori*, che formano un semispazio aperto che ha come frontiera $T(\partial M)_x$.
- 3) i vettori che *puntano dentro*, che compongono il semispazio complementare.

Ogni orientazione di M determina un'orientazione per ∂M come segue: per ogni $x \in \partial M$ scegliamo una base $(v_1, \dots, v_m)$ positivamente orientata di TM_x in maniera che $(v_2, \dots, v_m)$ siano tangenti alla frontiera (assumiamo $m \geq 2$) e v_1 sia un vettore che punta fuori; $(v_2, \dots, v_m)$ rappresentano l'orientazione richiesta per ∂M . Se la dimensione di M è uno, allora definiamo l'orientazione di un punto x di frontiera -1 o $+1$ a seconda che un vettore positivamente orientato in x punti dentro o fuori.

Ora siano M ed N due varietà differenziabili orientate a frontiera nulla di dimensione n , e sia $f : M \rightarrow N$ liscia. Se M è compatta ed N è connessa allora definiamo il grado di f come segue:

sia $x \in M$ un punto regolare di f , quindi $df_x : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ è un isomorfismo lineare tra due spazi vettoriali orientati. Definiamo il *segno* di df_x come $+1$ o -1 a seconda che df_x preservi o meno l'orientazione.

Per ogni valore regolare $y \in N$ definiamo

$$\deg(f, y) = \sum_{y \in f^{-1}(y)} \text{segno}(df_x).$$

È facile dimostrare che $\deg(f, y)$ è una costante locale per f .

Consideriamo ora la situazione in cui M sia la frontiera di una varietà differenziabile orientata e compatta X , e M sia orientata come la frontiera di X .

Lemma 6. *Se $f : M \rightarrow N$ può essere estesa ad una mappa liscia $F : X \rightarrow N$, allora $\deg(f, y) = 0$ per ogni y valore regolare di f .*

Dimostrazione. Per prima cosa supponiamo che y sia un valore regolare di f . Da ciò deriva che $F^{-1}(y)$ è una 1-varietà compatta con bordo, quindi formata da un'unione finita di archi e cerchi, e tale che i punti di frontiera degli archi appartengono a $\partial X = M$.

Sia $A \subset F^{-1}(y)$ uno di questi archi, con $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$. Va dimostrato che

$$\text{segno}(df_a) + \text{segno}(df_b) = 0,$$

da cui seguirà che, sommando su tutti gli archi, $\deg(f, y) = 0$.

L'orientazione di X ed N determina un'orientazione per A come segue: prendiamo $x \in A$, e sia $(v_1, \dots, v_{n+1})$ una base positiva per TM_x , con v_1 tangente ad A . Allora v_1 rappresenta l'orientazione richiesta per A se e solo se df_x manda $(v_2, \dots, v_{n+1})$ in una base positiva di TN_y .

Indichiamo con $v_1(x)$ il vettore positivamente orientato tangente ad A in x ottenuto come sopra. Chiaramente $v_1(x)$ è una funzione liscia, e in a ed in b punta una volta fuori e una volta dentro. Segue immediatamente che

$$\text{segno}(df_a) = -\text{segno}(df_b)$$

e quindi con somma zero.

In generale consideriamo un $y \in N$ che sia regolare per f ma non per F . La funzione $\deg(f, y)$ è una costante su un intorno U di y , e scelgo in esso un elemento y_1 che sia regolare per F (l'insieme dei valori regolari di una funzione liscia è denso). Deriva che

$$\deg(f, y) = \deg(f, y_1) = 0.$$

Questo prova il lemma. □

Consideriamo ora un'omotopia liscia $F : [0; 1] \times M \rightarrow N$, fra due mappe f e g da M in N fra varietà della stessa dimensione, con M compatta.

Lemma 7. *Per ogni valore regolare comune $y \in N$ accade che $\deg(f, y) = \deg(g, y)$.*

Dimostrazione. La varietà $[0; 1] \times M$ può essere orientata come prodotto, avendo la frontiera costituita da $1 \times M$ (con l'orientazione giusta), e $0 \times M$ (con l'orientazione sbagliata). Di conseguenza il grado di $F|_{\partial([0;1] \times M)}$ nel punto y è uguale a

$$\deg(g, y) - \deg(f, y)$$

ed in accordo col lemma precedente fa 0.

□

Il seguente teorema permette di definire il *grado di una funzione*.

Teorema 4. *$\deg(f, y)$ non dipende dalla scelta del valore regolare y .*

Il risultato che segue prova che il grado di una funzione è un invariante omotopico.

Teorema 5. *Se f e g sono differenziabilmente omotope, allora $\deg(f) = \deg(g)$.*

La dimostrazione di questi due teoremi è essenzialmente identica alla dimostrazione dei teoremi analoghi per il *grado modulo 2* e quindi non verrà qui riportata.

Notiamo subito che il grado di un diffeomorfismo è $+1$ o -1 a seconda che preservi o meno l'orientazione. Di conseguenza *un diffeomorfismo che non preserva l'orientazione non può essere omotopo all'identità*.

Un'applicazione di questo fatto è che, se prendiamo la mappa antipodale da S^n in se stessa, tale mappa non può essere omotopa all'identità se n è pari. Ciò deriva dal fatto che il grado della mappa antipodale è $(-1)^{n+1}$.

Una ulteriore applicazione è la dimostrazione del fatto che

Lemma 8. *Si possono costruire campi vettoriali tangenti mai nulli su una sfera S^n se e solo se n è dispari.*

Dimostrazione. Sia $v(x)$ il campo costruito sulla sfera. Possiamo pensare v come una funzione liscia dalla sfera in se stessa.

Definiamo ora l'omotopia

$$F : [0; \pi] \times S^n \rightarrow S^n$$

con la formula

$$F(\theta, x) = x \cos(\theta) + v(x) \sin(\theta)$$

Accade che $F(x, 0) = x$, $F(x, \pi) = -x$.

Ciò fornisce un'omotopia fra l'identità e la mappa antipodale che nel caso di n pari è già stata definita impossibile. Quindi abbiamo appena dimostrato che, se riesco a costruire un campo vettoriale tangente non nullo, n è dispari.

Nell'altro senso, se $n = 2k - 1$, la formula esplicita

$$v(x_1, \dots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1})$$

rappresenta già un campo vettoriale mai nullo tangente alla sfera.

□

Capitolo 2

Cobordismo alla Pontryagin e teorema di Hopf

2.1 La costruzione di Pontryagin

Il grado di una mappa $M \rightarrow M'$ è definito solo fra varietà della stessa dimensione con M compatta. Studieremo ora una generalizzazione definita per le mappe lisce $f : M \rightarrow S^p$ da varietà compatte a frontiera nulla nella sfera di dimensione p .

Siano N ed N' due sottovarietà di dimensione n di M , con

$$\partial N = \partial N' = \partial M = \emptyset$$

La differenza di dimensione $m - n$ è detta *codimensione* delle sottovarietà.

Definizione 2. N si dice *cobordante in N' dentro M* , se il sottoinsieme $N \times [0; \epsilon] \cup N' \times [1 - \epsilon; 1]$ di $M \times [0; 1]$ può essere esteso ad una varietà compatta $X \subset M \times [0; 1]$ in modo che $\partial X = N \times 0 \cup N' \times 1$, e che X intersechi $M \times 0 \cup M \times 1$ solo nei punti di frontiera di X . Definiamo questa costruzione come *cobordismo fra N e N'* .

L'essere cobordanti definisce una relazione di equivalenza tra le sottovarietà N di M di codimensione p . Le classi di equivalenza definite sono indicate come *classi di cobordismo*.

Definizione 3. Una funzione di scelta per una sottovarietà $N \subset M$ è una funzione liscia η che assegna ad ogni $x \in N$ una base dello spazio $TN_x^\perp \subset TM_x$ dei vettori normali a N in M in x .

La coppia (N, η) è detta *sottovarietà con riferimento di M* . Due sottovarietà con riferimento (N, η) e (N', μ) sono *cobordanti con riferimento* se esiste un cobordismo $X \subset M \times [0; 1]$ fra N e N' e un funzione di scelta ζ per X tale che

- 1) $\zeta(x, t) = (\eta(x), 0)$ per $(x, t) \in N \times [0; \epsilon]$
- 2) $\zeta(x, t) = (\mu(x), 0)$ per $(x, t) \in N' \times [1 - \epsilon; 1]$

Anche questa è una relazione di equivalenza e suddivide le sottovarietà con riferimento in *classi di cobordismo con riferimento*.

Consideriamo ora una mappa liscia $f : M \rightarrow S^p$ definita su di una varietà compatta, ed un suo valore regolare $y \in S^p$. La mappa f induce una funzione di scelta per la varietà $f^{-1}(y)$ come segue: scegliamo una base positiva $\mathbf{b} = (v_1, \dots, v_p)$ per $T(S^p)_y$. Per ogni $x \in f^{-1}(y)$ ricordiamo che $df_x : TM_x \rightarrow T(S^p)_y$ mappa il sottospazio $T(f^{-1}(y))_x$ nello zero e mappa il suo ortogonale isomorficamente in $T(S^p)_y$. Quindi prendiamo come funzione di scelta per $f^{-1}(y)$ in M , la funzione $f_{\mathbf{b}}(x)$ che associa ad ogni $x \in f^{-1}(y)$ l'unica base che ordinatamente viene mappata da df_x nella base scelta per $T(S^p)_y$.

Definizione 4. *La varietà con riferimento $(f^{-1}(y), f_{\mathbf{b}})$ viene definita varietà di Pontryagin associata ad f .*

Naturalmente diverse scelte di $y \in S^p$ e di basi per $T(S^p)_y$ portano alla definizione di diverse varietà di Pontryagin per f , ma ora ci accingeremo a dimostrare che comunque sono tutte appartenenti alla stessa classe di cobordismo con riferimento.

Lemma 9. *Se $\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}'$ sono due differenti basi positive di $T(S^p)_y$, allora le varietà di Pontryagin $(f^{-1}(y), f_{\mathbf{b}})$ e $(f^{-1}(y), f_{\mathbf{b}'})$ appartengono alla stessa classe di cobordismo con riferimento.*

Dimostrazione. Prendiamo un cammino liscio h fra $\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}'$ nello spazio della basi positivamente orientate per $T(S^p)_y$, è possibile perché tale spazio può essere identificato con lo spazio $GL(p, \mathbb{R})$, e quindi risulta essere connesso per archi. Sia ora H il risultato della composizione di h con due cammini identici, uno composto a destra ed uno a sinistra. Tale cammino serve per dare origine alla funzione di scelta F per il cobordismo $f^{-1}(y) \times [0; 1]$ definita da

$$F(x, t) = f_{H(t)}(x).$$

Questo colloca le due varietà di Pontryagin nella stessa classe di cobordismo con riferimento. □

D'ora in poi, con un piccolo abuso di notazione, ometteremo il richiamo alla funzione di scelta e parleremo soltanto della varietà con riferimento $f^{-1}(y)$.

Lemma 10. *Se y è un valore regolare per f , e z è sufficientemente "vicino" a y , allora $f^{-1}(y)$ è cobordante con riferimento in $f^{-1}(z)$.*

Dimostrazione. Poiché l'insieme dei valori critici è un compatto, allora esiste la possibilità di scegliere un $\epsilon > 0$ tale che un intorno di raggio ϵ di y contenga solo valori regolari, e sia z uno degli elementi di questo intorno. Sia $F : S^p \times [0; 1] \rightarrow S^p$ l'isotopia fra l'identità e la rotazione che mappa y in z (chiamiamola r) e tale che

- 1) $F(x, t) = x$ per $0 \leq t < \epsilon'$
- 2) $F(x, t) = r(x)$ per $1 - \epsilon' < t \leq 1$

C'è da notare che $F^{-1}(z, t)$ al variare di t si muove nell'arco di cerchio massimo fra y e z , e rimane quindi un valore regolare per f .

Definiamo ora l'omotopia

$$H : M \times [0; 1] \rightarrow S^p$$

come $H(x, t) = F(f(x), t)$. Per ogni t risulta che z è un valore regolare per F , e ne deriva che lo è anche per H . Di conseguenza $H^{-1}(z)$ è una varietà con riferimento che risulta essere un cobordismo con riferimento per le due varietà di Pontryagin $f^{-1}(z)$ e $(r \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}r^{-1}(z) = f^{-1}(y)$. $\square$

Lemma 11. *Siano f e g omotope e y un valore regolare per entrambe, allora $f^{-1}(y)$ è cobordante con riferimento in $g^{-1}(y)$.*

Dimostrazione. Scegliamo un'omotopia F tale che

- 1) $F(x, t) = f(x)$ per $0 \leq t < \epsilon$
- 2) $F(x, t) = g(x)$ per $1 - \epsilon < t \leq 1$

Scegliamo un valore z per F che sia abbastanza "vicino" a y nel senso del lemma precedente; ciò implica che $f^{-1}(y)$ sia cobordante in $f^{-1}(z)$ e $g^{-1}(y)$ sia cobordante in $g^{-1}(z)$. Ultima cosa da notare è che $F^{-1}(z)$ è un cobordismo con riferimento fra $g^{-1}(z)$ e $f^{-1}(z)$. Questo conclude il lemma. $\square$

Ora possiamo dimostrare il seguente

Teorema 6. *Siano y, z due valori regolari per f , allora $f^{-1}(y)$ è cobordante in $f^{-1}(z)$.*

Dimostrazione. Sia $r : S^p \rightarrow S^p$ la rotazione che manda y in z . Essa è omotopa alla mappa identica, il che implica che $r \circ f$ risulta omotopa ad f , e quindi, come dal lemma 3, che $f^{-1}(y)$ è cobordante in $f^{-1}(z)$. $\square$

Siamo quindi riusciti a dimostrare che tutte le varietà di Pontryagin per una funzione liscia $f : M \rightarrow S^p$ appartengono alla stessa classe di cobordismo con riferimento e inoltre tale relazione vale per le varietà di Pontryagin relative a funzioni omotope.

Poniamoci da ora in poi nella seguente situazione: sia $N \subset M$ una sottovarietà con riferimento di codimensione p e funzione di scelta β . Assumiamo che N sia compatta e che $\partial N = \partial M = \emptyset$.

Teorema 7. *Esiste almeno un intorno di N in M esso risulta diffeomorfo al prodotto $N \times \mathbb{R}^p$. Inoltre si può scegliere il diffeomorfismo di modo che ogni $x \in N$ corrisponda alla coppia $(x, 0)$ e ogni base dello spazio normale $\beta(x)$ corrisponda alla base canonica per $\mathbb{R}^p$.*

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo il teorema nel caso particolare in cui M sia lo spazio euclideo $\mathbb{R}^{n+p}$. Consideriamo la mappa $g : N \times \mathbb{R}^p \rightarrow M$, definita da

$$g(x; t_1, \dots, t_p) = x + t_1\beta_1(x) + \dots + t_p\beta_p(x)$$

Chiaramente $dg_{(x,0,\dots,0)}$ è non singolare; di conseguenza g mappa diffeomorficamente un intorno aperto di $(x, 0)$ in un aperto.

Proveremo ora che g è biettiva su di un intorno $N \times U_\epsilon$ di $N \times 0$, dove U_ϵ denota un ϵ -intorno di 0 in $\mathbb{R}^p$. Se non fosse, allora esisterebbero coppie $(x, u), (x', u')$ con $\|u\|$ e $\|u'\|$ arbitrariamente piccole su cui la g coincide. Essendo però N compatta posso costruire una successione di queste coppie in cui x tende a x_0 , x' tende a x'_0 con $u, u' \rightarrow 0$. Chiaramente $x_0 = x'_0$ contraddicendo

il fatto che g sia un diffeomorfismo in un intorno di $(x_0, 0)$. Di conseguenza $N \times U_\epsilon$ risulta diffeomorfo ad un intorno di N in M , e, aggiungendo che U_ϵ è diffeomorfo all'intero spazio euclideo $\mathbb{R}^p$, abbiamo il diffeomorfismo desiderato. Questo chiude la dimostrazione del teorema nel caso particolare di $M = \mathbb{R}^{n+p}$.

Nel caso generale basta rimpiazzare le rette di $\mathbb{R}^{n+p}$ con le geodetiche di M ; più precisamente sia ora definita $g(x, t_1, \dots, t_n)$ come il punto finale della geodetica di lunghezza $\|t_1\beta_1(x) + \dots + t_p\beta_p(x)\|$ in M che parte da x con direzione iniziale parallela a $t_1\beta_1(x) + \dots + t_p\beta_p(x)$. Se si ha un pò di familiarità con le geodetiche non è difficile dimostrare che

$$g : N \times U_\epsilon \rightarrow M$$

è ben definita e liscia. Il resto della dimostrazione prosegue esattamente come la prima parte di questa dimostrazione. $\square$

Teorema 8. *Per ogni sottovarietà compatta con riferimento (N, β) di codimensione p in M , è possibile costruire una mappa liscia $f : M \rightarrow S^p$ di cui (N, β) risulta essere la varietà di Pontryagin associata.*

Dimostrazione. Sia $N \subset M$ una sottovarietà compatta, senza bordo e con riferimento. Prendiamo la rappresentazione come prodotto

$$g : N \times \mathbb{R}^p \rightarrow V \subset M$$

per un intorno V di N . Definiamo ora la proiezione

$$\pi : V \rightarrow \mathbb{R}^p$$

così: $\pi(g(x, y)) = y$. Chiaramente 0 è un valore regolare, e $\pi^{-1}(0)$ è proprio N con il giusto riferimento.

Scegliamo ora una mappa liscia $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow S^p$ che mappi ogni x tale che $\|x\| \geq 1$ in un punto scelto s_0 , e mappi la palla unitaria diffeomorficamente in $S^p - s_0$. Definiamo

$$f : M \rightarrow S^p$$

in modo che

- 1) $f(x) = \varphi(\pi(x))$ per $x \in V$
- 2) $f(x) = s_0$ per $x \in M - V$

È facile notare che f risulta essere liscia, e che il punto $\varphi(0)$ è un valore regolare per f . Da ciò deriva che la corrispondente varietà di Pontryagin corrispondente a $f^{-1}(\varphi(0)) = \pi^{-1}(0)$ è uguale alla sottovarietà con riferimento N . $\square$

Lemma 12. *Se le sottovarietà di codimensione p con riferimento $(f^{-1}(y), f_\flat)$ e $(g^{-1}(y), g_\flat)$ sono uguali, allora f e g sono omotope.*

Dimostrazione. Chiamiamo N l'insieme $f^{-1}(y)$. Le ipotesi fatte affermano che $df_x = dg_x$ per qualunque $x \in N$

Per primo supponiamo che f coincida con g su di un intero intorno $V \subset M$ di N . Sia $h : S^p - y \rightarrow \mathbb{R}^p$ la proiezione stereografica. Allora l'omotopia

$$H(x, t) = f(x) \text{ per } x \in V$$

$H(x, t) = h^{-1}[t \cdot h(f(x)) + (1 - t) \cdot h(g(x))]$ per $x \in M - V$
 prova che f è omotopa a g .

Ora basta quindi dimostrare che è possibile deformare f in modo che coincida con g su di un intorno di N , stando attenti però che tale deformazione non aggiunga punti alla retroimmagine di y . Prendiamo la rappresentazione prodotto

$$N \times \mathbb{R}^p \rightarrow V \subset M$$

per un intorno V di N , dove V sia abbastanza piccolo di modo che $f(V)$ e $g(V)$ non contengano $\bar{y}$, definito come l'antipodale di y . Identifichiamo V con $N \times \mathbb{R}^p$ e identifichiamo $S^p - \bar{y}$ con $\mathbb{R}^p$, così che otteniamo le due mappe corrispondenti

$$G, F : N \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

con

$$F^{-1}(0) = G^{-1}(0) = N \times 0,$$

e con

$$dF_{(x,0)} = dG_{(x,0)} = (\text{proiezione su } \mathbb{R}^p)$$

per ogni $x \in N$. Se trovassimo una costante c tale che

$$F(x, u) \cdot u > 0, \quad G(x, u) \cdot u > 0$$

per $x \in N$ e $0 < \|u\| < c$, allora otterremmo che i punti $F(x, u)$ e $G(x, u)$ appartenerrebbero allo stesso semispazio aperto in $\mathbb{R}^p$. Inoltre l'omotopia

$$(1 - t)F(x, u) + tG(x, u)$$

fra F e G non mapperebbe nessun nuovo punto in 0 finchè $\|u\| < c$.

Dal teorema di Taylor otteniamo che

$$\|F(x, u) - u\| \leq c_1 \|u\|^2 \text{ per } \|u\| < 1$$

ne segue che

$$|(F(x, u) - u) \cdot u| \leq c_1 \|u\|^3$$

ed infine

$$F(x, u) \cdot u \geq \|u\|^2 - c_1 \|u\|^3 > 0$$

per $0 < \|u\| < c = \min(c_1^{-1}, 1)$, e avremo disuguaglianze similari per G .

Scegliamo una mappa liscia non crescente $\lambda : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$\lambda(u) = 1 \text{ per } \|u\| \leq c/2$$

$$\lambda(u) = 0 \text{ per } \|u\| \geq c$$

Ora l'omotopia

$$F_t(x, u) = [1 - \lambda(u)t]F(x, u) + \lambda(u)tG(x, u)$$

deforma $F = F_0$ in F_1 che è tale che coincide con G sui punti in cui $\|u\| < c/2$, coincide con F sui punti in cui $\|u\| \geq c$, e non aggiunge nuovi zeri a quelli di F . Costruendo ora la deformazione corrispondente per la mappa originale f si conclude la dimostrazione. □

Teorema 9. *Due mappe da M in S^p sono differenziabilmente omotope se e solo se le varietà di Pontryagin associate sono cobordanti con riferimento.*

Dimostrazione. Se f e g sono differenziabilmente omotope allora, come già afferma il lemma 11, le due varietà di Pontryagin sono cobordanti. Viceversa se le due varietà sono cobordanti con riferimento prendiamo (X, β) il cobordismo con riferimento fra le due. Il teorema 8 ci assicura la costruzione di una mappa liscia

$$F : M \times [0; 1] \rightarrow S^p$$

di cui (X, β) sia la varietà di Pontryagin associata. Indichiamo con $F_t(x)$ la mappa $F(x, t)$, si nota subito che

- 1) F_0 e F_1 sono omotope,
 - 2) F_0 e f hanno la stessa varietà di Pontryagin associata e quindi sono omotope
 - 3) F_1 e g hanno la stessa varietà di Pontryagin associata e quindi sono omotope
- da cui deriva che f e g sono omotope

□

Il punto che abbiamo raggiunto ora è quello di aver dimostrato che *le classi di omotopia delle mappe lisce sono in rapporto uno ad uno con le classi di cobordismo con riferimento delle varietà di Pontryagin associate.*

2.2 Il teorema di Hopf

Concentriamoci ora sulle mappe lisce da varietà compatte di dimensione $m = p$ nella sfera S^p . In questo caso una sottovarietà di codimensione p è un insieme finito di punti, ed un'orientazione per lo spazio ortogonale alla sottovarietà nel punto x corrisponde ad un'orientazione per lo spazio TM_x .

Consideriamo le mappe che partono da varietà orientabili per cui abbiamo scelto l'orientazione positiva, definiamo ora $sgn(x)$ come $+1$ o -1 a seconda che la base data dalla funzione di scelta abbia o meno la stessa orientazione della varietà in x .

Facile da vedere che se (X, β) è la varietà di Pontryagin associata alla mappa f , allora $\sum_{x \in X} sgn(x) = deg(f)$.

Altrettanto semplice da vedere è che varietà di Pontryagin con stessa somma dei segni sono cobordanti.

Da qui deriva il seguente

Teorema 10 (Teorema di Hopf). *Se M è compatta, connessa, orientata e senza bordo, allora due mappe lisce $f, g : M \rightarrow S^p$, sono differenziabilmente omotope se e solo se hanno lo stesso grado.*

Supponiamo ora che M non sia orientabile. Allora comunque scelta una base per TM_x si può spostare x su di un cammino chiuso in M in modo da trasformare la base data in una con orientazione opposta.

Questo fatto ci permette di enunciare il

Teorema 11. *Se M è connessa, compatta, senza bordo, ma non orientabile, allora due mappe lisce $f, g : M \rightarrow S^p$ sono differenziabilmente omotope se e solo se hanno lo stesso grado modulo 2.*