Analisi Matematica I: Calcolo differenziale
CdL Informatica, a.a. 1999-2000.
Soluzioni del TEST No. 2

1. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{27} < 1,$$
   quindi la serie converge.
2. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{4}{27}|x|;$$
   la serie converge assolutamente per $|x| < \frac{27}{4}$. Per il criterio necessario essa non converge per gli altri x.
3. Diverge. Infatti, $[\log_2 n] \leq \log_2 n$ e quindi:
   $$\frac{1}{2^{[\log_2 n]}} \geq \frac{1}{n}.$$
4. L'esercizio precedente e questo si possono risolvere anche applicando il principio di condensazione:
   $$2^n \cdot \frac{1}{2^{\alpha[\log_2 2^n]}} = \frac{2^n}{2^{\alpha n}} = 2^{(1-\alpha)n},$$
   cioè la serie converge se e solo se $\alpha > 1$.
5. $$\lim_{n\to+\infty} a_n \quad \text{non esiste}$$
   e quindi la serie non converge.
6. Poiché $a_n \to 0$, si ha:
   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sin(a_n/2)}{a_n} \to \frac{1}{2},$$
   e quindi la serie converge per il criterio del rapporto.
7. Converge per il criterio del confronto (si confronta con $\frac{1}{k^2}$.)
8. Si ha:
   $$\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) =$$
   $$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right).$$

Sommando tra $k = 1$ e $k = +\infty$, si ottiene:

$$\frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}.$$

9. Per il criterio della radice la serie converge.

10. La serie converge. Si confronta asintoticamente il termine n-simo di questa serie con la successione:

$$\frac{1}{n(\log_2 n)^2}.$$

Per il criterio di condensazione la serie relativa a questa successione converge.

11. La serie diverge perché:

$$\frac{1}{\log(n+1)} \geq \frac{1}{n}.$$

12. La serie diverge perché si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{\{\log(n+1)\}^\alpha}}{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

13.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n+1} = q \sum_{n=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^n = \frac{q}{1-q^2}.$$

14.

$$\lim_{n=1}^{+\infty} \frac{\{(2n)!\}^{-\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{e^2}{4}$$

e quindi la serie converge.

15.

$$\lim_{n=1}^{+\infty} \frac{\{n!\}^{-\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = e$$

e quindi la serie diverge.

16.

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{2n+1}} + \cdots = \frac{1/2}{1-1/4} = \frac{2}{3}.$$