Analisi Matematica I: Calcolo differenziale, CdL Informatica, a.a. 1998-98.
Novembre 1998

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

(1a) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+3n} - \sqrt[3]{n^2-7n+9} \right)$;

(1b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[4]{n^3-3n^2+1} - \sqrt[4]{n^3+7n^2+9} \right) \sqrt[4]{n+7}$;

(2a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n\cos(n+1/n)\pi}{\sqrt{n^2+3}}$;

(2b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n\cos(n+1/n)\pi}{\sqrt{n^4+3}}$;

(3a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{7^n+2^n}{3^n+5^n}$;

(3b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n+b^n}{c^n+d^n}$, dove a, b, c, d sono tutti diversi fra loro e > 1;

(4a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log_2(n^2+7^n)}{\log_3(n^3+2^n)}$;

(4b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log_a(n^\alpha+A^n)}{\log_b(n^\beta+B^n)}$, dove $a, b, A, B > 1$ e $\alpha, \beta > 0$;

(5a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$;

(5b) $\lim_{n\to+\infty} n^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$;

(6a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$;

(6b) $\lim_{n\to+\infty} \binom{2n}{n}$

(7a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\ [\log_2(k+1) - \log_2 k]$;

(7b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\log_3(k+1)}$.

(8a) Determinare $a > 0$ in modo che:

$$\log_2(n+1) \le an, \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots.$$

(8b) Stabilire per quali α, $0 \le \alpha \le 1$, la successione definita per ricorrenza da:

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = -1 + \frac{1}{1+a_n},\ n = 1, 2, \ldots$$

converge ed, in caso affermativo, calcolare il limite.

Calcolare:

(9a) $$\inf_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}\right);$$

(9b) $$\sup_{n\geq 1}\frac{n\cos(n+1/n)\pi}{\sqrt{n^2+3}}.$$

(10a) Sia $A=\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$. La proposizione:

$$\exists\ n \text{ tale che } a_n > 10$$

significa:

(a) A è illimitato superiormente;
(b) 10 non è un maggiorante di A;
(c) A è limitato inferiormente;
(d) $\lim_{n\to+\infty} a_n \geq 10$.

(10b) Sia 13 un maggiorante di $A=\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$. La proposizione:

$$\exists\ \epsilon>0 \text{ tale che } a_n < 13-\epsilon \ \ \forall\ n=1,2,\ldots$$

implica che:

(a) $\sup A = 13$;
(b) $\inf A = 13$;
(c) $\sup A \neq 13$;
(d) A non ammette estremo superiore.