

IL nucleo di Gauss

$$(1) \quad H_t(x) = (4\pi t)^{-N/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

soddisfa l'equazione del calore

$$\partial_t H_t = \Delta H_t \quad \text{per } x \neq 0 \text{ e } t > 0$$

ed inoltre $H_t > 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} H_t(x) dx = 1 \quad \text{per ogni } t > 0$$

Si noti anche che

$$H_t(x) = t^{-N/2} H_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right);$$

quindi H_t è un mollificatore e quindi la convoluzione

$$(1) \quad u(x, t) = H_t * f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0,$$

è tale che

$$(2) \quad \|u(\cdot, t) - f\|_p \rightarrow 0 \quad \text{se } t \rightarrow 0^+,$$

per ogni $1 \leq p < \infty$ e per $p = \infty$ quando $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Sappiamo anche che

$$\Delta u(x, t) = (\Delta H_t) * f(x) = (\partial_t H_t) * f(x) = \partial_t u(x, t)$$

per ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$. Dunque u è soluzione del problema ai valori iniziali

$$u_t = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty),$$

$$u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times \{0\},$$

nel senso specificato dalla (2).

Si noti che

$$-4t \log H_t(x) \rightarrow |x|^2 = \text{dist}(x, 0)^2 \text{ se } t \rightarrow 0^+.$$

Questa proprietà si può generalizzare con le dovute interpretazioni. Si osservi intanto che se $f \geq 0$

$$\begin{aligned} u(x, t)^{4t} &= (4\pi t)^{-2Nt} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \right)^{4t} \\ &= (4\pi t)^{-2Nt} \|g_x\|_{L^p(\mathbb{R}^N, f dy)}^{4t} \end{aligned}$$

dove $p = \frac{1}{4t}$ e $g_x(y) = e^{-|x-y|^2}$.

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora dalla teoria degli spazi L^p avremo:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t)^{4t} &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \|g_x\|_{L^p(\mathbb{R}^N, f dx)}^{4t} = \|g_x\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, f dx)}^{4t} \\ &= \sup_{y \in \text{supp}(f)} e^{-|x-y|^2} = e^{-\inf_{y \in \text{supp}(f)} |x-y|^2} \end{aligned}$$

dove $\text{supp}(f)$ è il supporto essenziale di f .

In definitiva

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \{-4t \log u(x, t)\} = \left[\inf_{y \in \text{supp}(f)} |x-y| \right]^2 = \text{dist}(x, \text{supp}(f))^2.$$

Qualitativamente la (3) ci dice che, per tempi molto piccoli, le superfici di livello di u assomigliano a quelle della distanza da $\text{supp}(f)$.

Questo tipo di comportamento può essere dimostrato anche per la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet

(3)

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{su } \Omega \times \{0\}, \\ u = 1 & \text{su } \partial\Omega \times (0, \infty); \end{cases}$$

risultava infatti che

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \{-4t \log u(x, t)\} = \text{dist}(x, \partial\Omega)^2, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Una giustificazione di (4) è la seguente. Sia $v(x, t) = -4t \log u(x, t)$; allora

$$\begin{cases} 4t (v_t - \Delta v) = 4v - |\nabla v|^2 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, \infty). \end{cases}$$

Sia $v_0(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} v(x, t)$; allora

$$\begin{cases} |\nabla v_0|^2 = 4v_0 & \text{in } \Omega, \\ v_0 = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

ma posto $v_0 = w^2$ si ha:

$$|\nabla w|^2 = 1 \quad \text{in } \Omega \quad \text{e} \quad w = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

cioè $w = \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

La (4) ci informa allora che, per tempi piccoli, le superfici di livello di u assomigliano alle superfici parallele a $\partial\Omega$.

Vediamo ora un'applicazione della formula (4). Si dice che una superficie $\Gamma \subset \Omega$ di codimensione 1 è una superficie invariante per il o una superficie isotermica stazionaria se, per ogni $t > 0$, esiste $c(t)$ tale che

(4)

$$u(x, t) = c(t), \quad x \in \Gamma,$$

La (4) allora implica che per ogni $x \in \Gamma$

$$\text{dist}(x, \partial\Omega)^2 = - \lim_{t \rightarrow 0^+} 4t \log c(t),$$

cioè Γ è una superficie parallela a $\partial\Omega$,

In una dispensa precedente abbiamo dimostrato che, se Ω è limitato e u è la soluzione del problema

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

è costante su una superficie parallela a $\partial\Omega$, allora Ω è una palla.

Si consideri allora la funzione $w(x, t) = 1 - u(x, t)$; essa soddisfa chiaramente il problema:

$$w_t = \Delta w \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty),$$

$$w = 1 \quad \text{su } \Omega \times \{0\},$$

$$w = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, \infty).$$

La funzione $v(x) = \int_0^\infty w(x, t) dt$ allora è nulla su $\partial\Omega$ ed inoltre

$$\Delta v(x) = \int_0^\infty \Delta w(x, t) dt = \int_0^\infty w_t(x, t) dt = w(x, t) \Big|_0^\infty = -1$$

in Ω . È chiaro infine che se Γ è una superficie invariante per u , allora v è costante su Γ .

Concludiamo allora che, se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è limitato e $\Gamma \subset \Omega$ è una superficie invariante per u , allora Ω è una palla.