CURVATURA DELLE LINEE EQUIPOTENZIALI IN UN CONDENSATORE

Siano D_0 e D_1 due domini semplicemente connessi e limitati con $\overline{D_1} \subset D_0$ e poniamo $\Omega = D_0 \setminus \overline{D_1}$. Se per esempio tutti i punti di $\partial\Omega$ sono regolari, allora il problema di Dirichlet

$$(1) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{su } \partial D_0, \\ u &= 1 \quad \text{su } \partial D_1, \end{aligned}$$

ammette una ed una sola soluzione $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Da un punto di vista fisico, u può essere interpretata come il potenziale elettrostatico all'interno di un condensatore, Ω, quando si sia applicata una differenza di potenziale unitaria tra le due armature ∂D_0 e ∂D_1. Il principio di massimo forte garantisce subito che $0 < u < 1$ in Ω; inoltre, il lemma di Hopf ci dice che il gradiente di u non si annulla in ogni punto di $\partial\Omega$ con la proprietà della sfera interna.

Un problema interessante si propone di ottenere informazioni sulle superfici di livello di u (le <u>superfici equipotenziali</u>) da analoghe informazioni su ∂D_0 e ∂D_1.

Nel caso in cui Ω sia un dominio piano, possiamo sfruttare tutta la potenza della variabile complessa. Premettiamo il seguente lemma in cui si fa uso delle notazioni:

$$2\,\partial_z u = \partial_x u - i\,\partial_y u \quad \text{e} \quad 2\,\partial_{\bar z} u = \partial_x u + i\,\partial_y u.$$

Si noti che il vettore associato a $2\partial_{\bar z} u(z)$ non è altro che il gradiente $\nabla u(z)$ di u in z.

LEMMA. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\Omega)$. Sia inoltre $z \in \Omega$ un punto in cui ∇u non si annulla.

Indichiamo con $h(z)$ e $k(z)$, rispettivamente, le curvature della linea di livello e di quella di massima pendenza di u passanti per z.

Allora

$$h(z)+i\,k(z) = -2\,\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{i\omega(z)}\right) = -2\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial_{\bar z} u}{|\partial_{\bar z} u|}\right),$$

dove $\omega(z) = \arg\left(\partial_{\bar z} u\right)$.

DIM. Sia $s \mapsto z(s)$ la parametrizzazione secondo la lunghezza d'arco della linea di livello di u passante per z scelta in modo tale che ∇u punti alla sinistra di essa e poniamo $z(0)=z$. E' chiaro che

$$z'(s) = -i\,\frac{\partial_{\bar z} u}{|\partial_{\bar z} u|}(z(s)) = -i\,e^{i\omega(z(s))}$$

e quindi $\arg z'(s) = -\frac{\pi}{2} + \omega(z(s))$. Perciò

$$h(z(s)) = \frac{d}{ds}\,\omega(z(s)) = \partial_z \omega(z(s))\,z'(s) + \partial_{\bar z}\omega(z(s))\,\overline{z'(s)} =$$

$$= -i\,e^{i\omega(z(s))}\,\omega_z(z(s)) + i\,e^{-i\omega(z(s))}\,\partial_{\bar z}\omega(z(s))$$

e, ponendo $s=0$, otteniamo

$$h(z) = -i\,e^{i\omega(z)}\,\omega_z(z) + i\,e^{-i\omega(z)}\,\partial_{\bar z}\omega(z) =$$

$$= -\partial_z\left(e^{i\omega(z)}\right) - \partial_{\bar z}\left(e^{-i\omega(z)}\right) =$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\,\partial_z\left(e^{i\omega(z)}\right).$$

In maniera analoga, si dimostra che $k(z) = -2\,\mathrm{Im}\,\partial_z\left(e^{i\omega(z)}\right)$. $\square$

TEOREMA. Sia $\Omega = D_0 \setminus \overline{D}_1 \subset \mathbb{R}^2$ con $\partial\Omega$ di classe C^2 e sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ la soluzione del problema (1).

Allora

(i) $\nabla u \neq 0$ in Ω;

(ii) la funzione $\dfrac{h+ik}{|\nabla u|}$ è olomorfa in Ω;

(iii) risulta che

$$\min_{\partial\Omega} \frac{h}{|\nabla u|} < \frac{h}{|\nabla u|} < \max_{\partial\Omega} \frac{h}{|\nabla u|} \quad \text{in } \Omega,$$

In particolare, se D_0 e D_1 sono convessi, allora la linea di livello $\Gamma_t = \{z \in \Omega \,;\, u(z) = t\}$ è la frontiera di un insieme uniformemente convesso per ogni $t \in (0,1)$.

Dim. (i) Si osservi che la funzione $f = u_x - i u_y$ è olomorfa in Ω, dato che u è armonica in Ω. Abbiamo già osservato che ∇u non si annulla su $\partial\Omega$ per il lemma di Hopf.

Poiché ∂D_0 è una linea di livello di u, risulta che

$$\overline{f(z)} = -|f(z)| \left[\nu_x(z) + i\, \nu_y(z) \right], \quad z \in \partial D_0,$$

dove $\nu = (\nu_x, \nu_y)$ è il versore della normale esterna ad Ω.

Perciò

$$\Delta_{+\partial D_0} (\arg f) = -\Delta_{+\partial D_0} (\arg \overline{f}) = -\Delta_{+\partial D_0} (\arg \nu) = -2\pi,$$

dove l'orientazione su $\partial\Omega$ è scelta in modo da lasciare Ω sulla sinistra se si percorre $\partial\Omega$ nel verso positivo.

In modo analogo, $\Delta_{+\partial D_1} (\arg f) = 2\pi$ e quindi $\Delta_{+\partial\Omega} (\arg f) = 0$.

Il principio dell'argomento implica che $N = 0$, dato che anche $P = 0$, essendo f olomorfa in Ω. Ciò implica che $\nabla u \neq 0$ in Ω.

(ii) Il lemma implica che

$$\frac{h + ik}{|\nabla u|} = -\frac{2}{|f|}\, \partial_z \left(\frac{f}{|f|} \right) = \frac{f'}{f^2},$$

cioè $\frac{h+ik}{|\nabla u|}$ è olomorfa in Ω, essendo f olomorfa e mai nulla in Ω.

(iii) Poiché $\frac{h}{|\nabla u|} = \mathrm{Re}\,\frac{h+ik}{|\nabla u|}$, essa è armonica in Ω (4)
e la tesi segue dal principio di massimo forte.
Se ∂D_0 e ∂D_1 sono convessi, allora $\frac{h}{|\nabla u|} \geq 0$ su $\partial\Omega$
e quindi $\frac{h}{|\nabla u|} > 0$ in Ω. Essendo Γ_t compatto, esiste
una costante $m > 0$ tale che $\frac{h}{|\nabla u|} \geq m$ su Γ_t: ciò implica
che $D_t = D_1 \cup \{z \in \Omega \,;\, u(z) > t\}$ è uniformemente convesso. $\square$