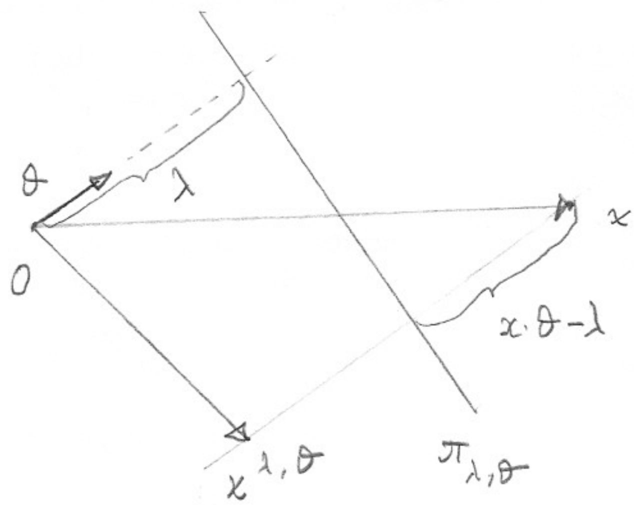
METODO DEI PIANI MOBILI: UN RISULTATO DI SIMMETRIA.

Sia S^{N-1} la sfera unitaria in $\mathbb{R}^N$ e siano $\theta \in S^{N-1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Poniamo:

$$\pi_{\lambda,\theta} = \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \theta = \lambda\} \quad \text{e}$$

$$x^{\lambda,\theta} = x - 2(x \cdot \theta - \lambda)\theta = R_{\lambda,\theta}\, x;$$

$\pi_{\lambda,\theta}$ è il piano a distanza λ dall'origine ed $x^{\lambda,\theta}$ è il <u>punto riflesso di x rispetto a $\pi_{\lambda,\theta}$</u>. E' chiaro che $R_{\lambda,\theta}^2 = I$.



Se $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione qualsiasi, definiamo:

$$v^{\lambda,\theta}(x) = v(x^{\lambda,\theta})$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$; $v^{\lambda,\theta}$ è la <u>funzione riflessa di v rispetto a $\pi_{\lambda,\theta}$</u>.

LEMMA 1. Se $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è tale che $v^{0,\theta} = v$ per ogni $\theta \in S^{N-1}$, allora v dipende solo da $|x|$.

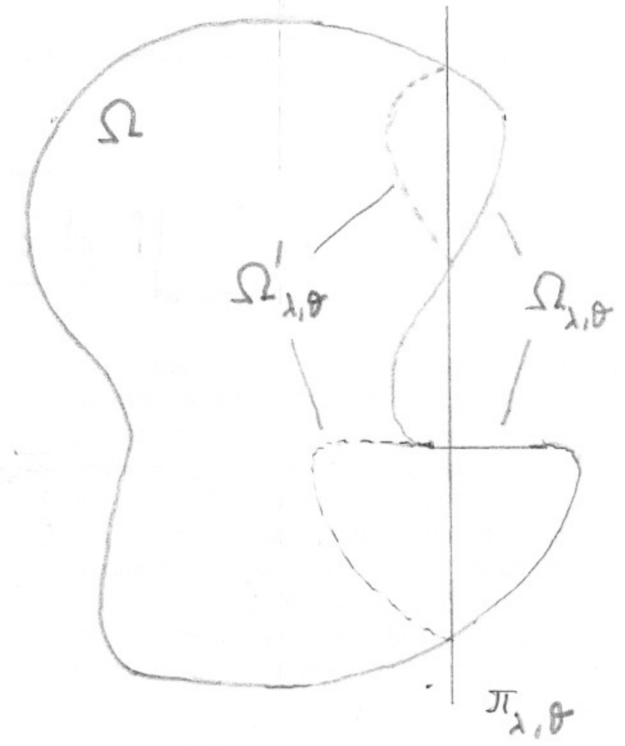
Dim. Siano $x, y \in \mathbb{R}^N$ tali che $|x| = |y|$ e sia $\theta = \frac{y-x}{|y-x|}$.
Risulta $x^{0,\theta} = x - 2(x\cdot\theta)\theta = x - 2x\cdot(y-x)\frac{y-x}{|y-x|^2}$
e quindi

$$x^{0,\theta} - y = (x-y)\left\{1 + \frac{2x\cdot(y-x)}{|y-x|^2}\right\} = \frac{x-y}{|x-y|^2}(|y|^2 - |x|^2) = 0.$$

Perciò

$$v(y) = v(x^{0,\theta}) = v^{0,\theta}(x) = v(x),$$

cioè punti con uguale distanza dall'origine hanno uguali valori. □



Fissati $\theta \in \mathbb{S}^{N-1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, poniamo:

$\Omega_{\lambda,\theta} = \{x \in \Omega : x \cdot \theta > \lambda\}$,

$\Omega'_{\lambda,\theta} = \{x \in \mathbb{R}^N : x^{\lambda,\theta} \in \Omega_\lambda\}$,

$\Lambda = \sup\{x \cdot \theta : x \in \Omega\}$.

In questa dispensa, illustreremo in un caso semplice il metodo dei piani mobili ideato da A. V. Alexandrov e successivamente ripreso e generalizzato da J. Serrin, B. Gidas, W-M. Ni e L. Nirenberg.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato con frontiera di classe C^2 e sia

$$d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Posto $\Omega_\sigma = \{x \in \Omega : d(x) < \sigma\}$, abbiamo già osservato che esiste $\sigma_0 > 0$ tale che $d \in C^2(\Omega_{\sigma_0})$.

TEOREMA 1. Sia u la soluzione del problema

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Sia $\Gamma_\sigma = \partial\Omega_\sigma \cap \Omega$ e supponiamo che esistano $c \in (0, +\infty)$ e $\sigma \in (0, \sigma_0]$ tali che

(1) $\quad u = c$ su Γ_σ.

Allora Ω è una palla.

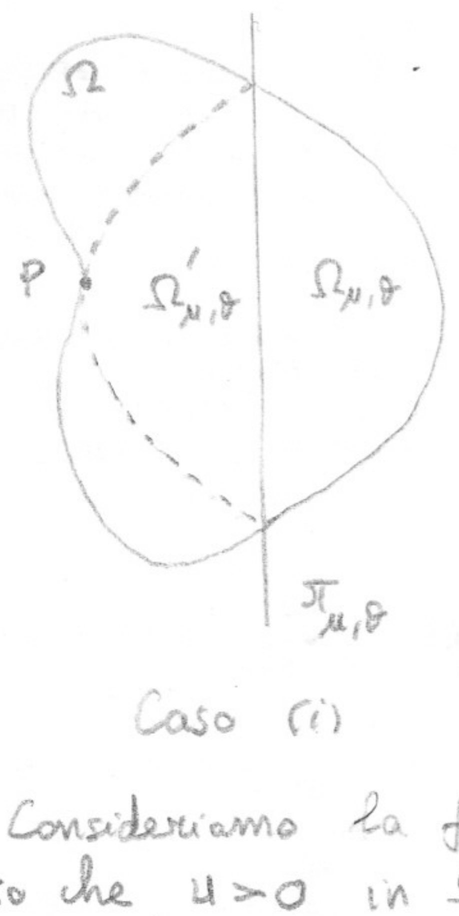
Dim. Fissiamo $\theta \in \mathbb{S}^{N-1}$ e supponiamo che Ω non sia simmetrico rispetto ad un qualche piano $\pi_{\lambda,\theta}$. Esiste sicuramente un $\delta > 0$ tale che l'insieme riflesso Ω'_λ rimane contenuto in Ω per ogni $\lambda \in (\Lambda - \delta, \Lambda)$;

questa situazione non cambia finché non si presenti una delle due evenienze seguenti:

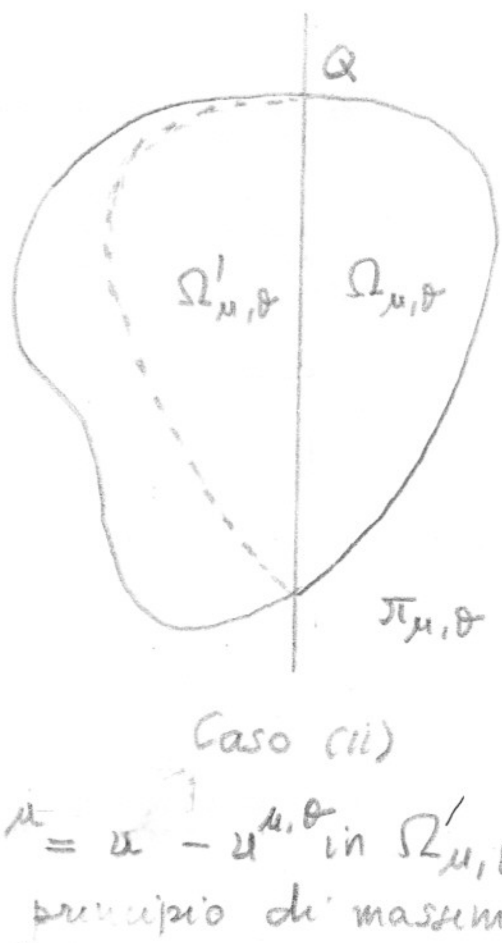
(i) Ω'_λ diventa tangente internamente a $\partial\Omega$ in qualche punto $P \notin \pi_{\lambda,\theta}$;

(ii) $\pi_{\lambda,\theta}$ raggiunge una posizione che è ortogonale a $\partial\Omega$ in qualche punto $Q \in \partial\Omega \cap \pi_{\lambda,\theta}$.

Sia μ il valore di λ in corrispondenza del quale si verifica una delle due evenienze (i) o (ii).



Caso (i)



Caso (ii)

Consideriamo la funzione $v^\mu = u - u^{\mu,\theta}$ in $\Omega'_{\mu,\theta}$. Dato che $u > 0$ in Ω (per il principio di massimo), risulta che $v^\mu(x) = u(x) - u(x^{\mu,\theta}) = u(x) > 0$ per ogni $x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega'_{\mu,\theta}$ con $x \neq P$; inoltre $v^\mu = 0$ su $\Omega \cap \pi_{\lambda,\theta}$ e dunque $v^\mu > 0$ su $\partial\Omega_{\mu,\theta}$. Dato che

$$\Delta u^{\mu,\theta}(x) = \Delta u(x^{\mu,\theta}) = -1 \quad \text{per } x \in \Omega'_{\mu,\theta},$$

si ha che $\Delta v^\mu = 0$ in $\Omega'_{\mu,\theta}$.

Per il principio di massimo forte, allora, o $v^\mu > 0$ o $v^\mu \equiv 0$ sulla componente connessa G_μ di $\Omega'_{\mu,\theta}$ la cui frontiera contenga P o Q. Per il lemma di Hopf, inoltre, se $v^\mu > 0$ in G_μ, si avrà anche che

$$(2) \qquad \frac{\partial v^\mu}{\partial \theta} = \frac{\partial v^\mu}{\partial \nu} < 0 \quad \text{su } \pi_{\mu,\theta} \cap \partial G_\mu ,$$

dato che $\nu = \theta$ è la normale esterna a G_μ su $\pi_{\mu,\theta} \cap \partial G_\mu$.

Se si verifica il caso (i), detto ν_P il versore della normale esterna a $\partial\Omega$ in P, il punto $P_\sigma = P - \sigma\nu_P$ appartiene a Γ_σ e quindi per la (1) si ha che

$$v^\mu(P_\sigma) = u(P_\sigma) - u(P_\sigma^{\mu,\theta}) = 0 ,$$

dato che $P_\sigma^{\mu,\theta} \in \Gamma_\sigma$. Perciò in questo caso dovrà essere $v^\mu \equiv 0$ in G_μ e quindi $u^{\mu,\theta} = u = 0$ nei punti $x \in \partial G_\mu \cap \partial\Omega$. Dunque $u(x^{\mu,\theta}) = 0$ per $x \in \partial G_\mu \cap \partial\Omega$ contro il fatto che $x^{\mu,\theta} \in \Omega$ e $u > 0$ in Ω.

Se invece si verifica il caso (ii), risulta che $\theta \in T_Q(\partial\Omega)$ e, dato che Γ_σ è parallela a $\partial\Omega$, $\theta \in T_{Q_\sigma}(\Gamma_\sigma)$ dove $Q_\sigma = Q - \sigma\nu_Q \in \Gamma_\sigma$ e ν_Q è la normale esterna a Ω in Q. Dato che u è costante su Γ_σ, deve essere

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(Q_\sigma) = 0 .$$

D'altra parte $Q_\sigma \in \Omega \cap \pi_{\mu,\theta}$ e quindi, per la (2)

$$2\,\frac{\partial u}{\partial \theta}(Q_\sigma) = \frac{\partial v^\mu}{\partial \theta}(Q_\sigma) < 0 .$$

Anche in questo caso allora $v^\mu \equiv 0$ in G_μ e si conclude come prima.

In definitiva, supponendo che Ω non fosse simmetrico nella direzione θ, abbiamo trovato un assurdo. Per l'arbitrarietà di $\theta \in S^{N-1}$ ed il LEMMA 1, Ω è una palla. $\square$

Con gli stessi ragionamenti, possiamo dimostrare il seguente risultato.

TEOREMA 2. Sia $U = U(x,t)$ una soluzione dell'equazione del calore

(3) $U_t = \Delta U$ in $\Omega \times (0,\infty)$,

tale che

(4) $U(x,0) = 1$ per $x \in \Omega$, $U(x,t) = 0$ per $(x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty)$.

Se esistono $c \in (0,+\infty)$, $\sigma \in (0,\sigma_0]$ e $t_0 > 0$ tali che

$$U(x,t_0) = c \text{ per ogni } x \in \Gamma_\sigma,$$

allora Ω è una palla.

Dim. Si considera la funzione $u(x) = U(x,t_0)$ e si ripetono gli stessi ragionamenti di prima applicando il principio di massimo forte ed il lemma di Hopf nella versione per operatori parabolici. □

OSSERVAZIONE. Sia U una soluzione di (3) e supponiamo che esista $c : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tale che

$$U(x,t) = c(t) \text{ per ogni } x \in \Gamma \text{ e } t > 0,$$

dove Γ è una superficie di codimensione 1 contenuta in Ω. Si dice allora che Γ è una <u>superficie invariante</u> per u in Ω oppure che Γ è una <u>superficie isotermica stazionaria</u> per u. Si può far vedere che, sotto certe ipotesi su $\partial\Omega$ e Γ, se U soddisfa (3) e (4), allora Γ è analitica e risulta che esiste $\sigma \in (0,\sigma_0]$ tale che $\Gamma = \Gamma_\sigma$. Il TEOREMA 2 allora implica che, <u>se la soluzione</u> U <u>di</u> (3) <u>e</u> (4) <u>possiede una superficie invariante in</u> Ω, <u>allora</u> Ω <u>deve essere una palla</u>.