PRINCIPIO DI MASSIMO PER LA CONCAVITÀ

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio convesso; una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ è <u>convessa in Ω</u> se, per ogni $x_0, x_1 \in \Omega$ risulta:

$$v((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)v(x_1) + \lambda v(x_2), \quad \text{per ogni } \lambda \in [0,1].$$

È noto che, se Ω è convesso e limitato e v è semicontinua inferiormente, allora v è convessa in Ω se e solo se

$$v\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{v(x_1)+v(x_2)}{2} \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in \Omega.$$

Si definisca la <u>funzione concavità di v</u>; $C_v : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ tale che

$$C_v(x_1,x_2) = v\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{v(x_1)+v(x_2)}{2}, \quad (x_1,x_2) \in \Omega \times \Omega,$$

Allora una funzione semicontinua inferiormente $v : \Omega \to \mathbb{R}$ è convessa in Ω se e solo se $C_v \leq 0$ in $\Omega \times \Omega$,

TEOREMA 1 (Principio di massimo per C_v)

Sia $v \in C^2(\Omega)$ una soluzione dell'equazione

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\nabla v) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - b(x, v, \nabla v) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un dominio convesso e limitato e

(i) $a_{ij}(p) = a_{ji}(p)$, $i,j = 1,\dots,N$, $p \in \mathbb{R}^N$ e

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(p)\xi_i \xi_j > 0 \quad \text{per ogni } p \in \mathbb{R}^N \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\};$$

(ii) $b : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è non negativa e strettamente crescente nella variabile v per ogni $(x,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ fissati;

(iii) la funzione $(x,v) \longmapsto 1/b(x,v,p)$ è convessa per ogni $p \in \mathbb{R}^N$ fissato.

Allora C_v non può assumere un massimo positivo in $\Omega \times \Omega$.

Dim. Supponiamo che $(x_1, x_2) \in \Omega \times \Omega$ sia un punto in cui C_v assume un massimo positivo, cioè tale che

$$(2) \qquad v(x_3) > \frac{v(x_1)+v(x_2)}{2} \qquad \text{con} \quad x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

Dato che il gradiente di C_v nelle sue $2N$ coordinate si deve annullare in (x_1, x_2), otteniamo:

$$\nabla v(x_1) = \nabla v(x_3) = \nabla v(x_1).$$

Si consideri ora la funzione $\mathcal{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathcal{E}(\omega, \alpha, \beta) = C_v(x_1+\alpha\omega, x_2+\beta\omega), \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \omega \in \mathbb{R}^N,$$

dove, per (α, β) fissato, il vettore $\omega \in \mathbb{R}^N$ è scelto in un intorno abbastanza piccolo di $\omega = 0$ in modo che gli argomenti della funzione v nella definizione di C_v stiano ancora in Ω.

Per ogni $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ fissato la funzione $\mathcal{E}(\omega,\alpha,\beta)$ ha un massimo locale in $\omega = 0$ e quindi

$$(3) \qquad \nabla_\omega \mathcal{E}(0,\alpha,\beta) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2_\omega \mathcal{E}(0,\alpha,\beta) \text{ è semidefinita negativa}.$$

Poniamo ora per semplicità $a_{ij} = a_{ij}(p)$, $i,j = 1,\dots,N$, e $b(x,v) = b(x,v,p)$ dove $p = \nabla u(x_1) = \nabla u(x_2) = \nabla u(x_3)$; allora la (3) implica che

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial\omega_i \partial\omega_j}(0,\alpha,\beta) \leq 0,$$

dato che vale la (i); in altre parole

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \left\{ \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x_3) - \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x_1) - \frac{\beta^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x_2) \right\} \leq 0.$$

Usando l'equazione (1) otteniamo allora la disuguaglianza

$$(4) \qquad \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 b(x_3, v(x_3)) \leq \frac{\alpha^2}{2} b(x_1, v(x_1)) + \frac{\beta^2}{2} b(x_2, v(x_2)).$$

Si noti ora che la (2) e la (ii) implicano che

$$b(x_3, v(x_3)) > b\left(x_3, \frac{v(x_1)+v(x_2)}{2}\right) \geq 0,$$

e quindi, scegliendo $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ in (4) si ottiene

(5) $\quad b(x_1, v(x_1)) \geq \frac{1}{2} b(x_3, v(x_3)) > 0.$

Scegliendo invece $\alpha = b(x_2, v(x_2))$ e $\beta = b(x_1, v(x_1))$ in (4), si ha:

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 b(x_3, v(x_3)) \leq \alpha\beta \, \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Si noti che la (5) e l'ipotesi (ii) implicano che $\frac{\alpha+\beta}{2} > 0$, cosicché

$$\frac{\alpha+\beta}{2} b(x_3, v(x_3)) < \alpha\beta;$$

quest'ultima disuguaglianza contraddice l'ipotesi (iii), infatti; con $\alpha = b(x_2, v(x_2))$ e $\beta = b(x_1, v(x_1))$ la (iii) implica:

$$\frac{1}{b(x_3, v(x_3))} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

e cioè $\quad \frac{\alpha+\beta}{2} b(x_3, v(x_3)) \geq \alpha\beta. \quad \square$

OSSERVAZIONE. La dimostrazione appena vista si basa su una scelta particolare dei parametri α e β; si potrebbe pensare che una scelta più oculata permetta ipotesi più deboli su b. La scelta fatta si rivela invece ottimale (si veda B. Kawohl, Rearrangements and convexity of level sets in PDE's, Springer Verlag 1985).

OSSERVAZIONE. La stretta monotonia di b in v (ipotesi (iii)) si può indebolire richiedendo che b sia solo crescente in v (si veda N. Korevaar, Indiana Univ. Math. J. 32 (1983), 603-614).

Il principio di massimo per la concavità vale anche per equazioni paraboliche in ipotesi più forti su b.

TEOREMA 2. Sia Ω come nel TEOREMA 1 e sia $v = v(x,t)$ una funzione, $C^2(\Omega)$ in x e $C^1((0,T])$ in t, soluzione dell'equazione

$$(6) \quad v_t = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(t, \nabla v) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - b(t, x, v, \nabla v) \quad \text{in } \Omega \times (0,T],$$

dove, per ogni $t \in (0,T]$ fissato, i coefficienti dell'equazione soddisfano le ipotesi (i) e (ii) del TEOREMA 1 ed in più la funzione $(x,v) \longmapsto b(t,x,v,p)$ è concava. Allora la funzione

$$C_v(t, x_1, x_2) = v\left(\frac{x_1+x_2}{2}, t\right) - \frac{v(x_1,t)+v(x_2,t)}{2}$$

assume un massimo positivo in un punto (t_0, x_1, x_2), deve verificarsi che o $t_0 = 0$ o almeno uno tra x_1 ed x_2 appartiene a $\partial\Omega$.

Dim. Sia $(t_0, x_1, x_2) \in (0,T] \times \Omega \times \Omega$ un punto di massimo per C_v. Procedendo esattamente come nella dimostrazione del TEOREMA 1, si ottiene che

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \omega_i \partial \omega_j}(0, \alpha, \beta) \leq 0,$$

dove questa volta $\mathcal{E}(\omega, \alpha, \beta) = C_v(t_0, \alpha\omega, \beta\omega)$ e $a_{ij} = a_{ij}(t_0, p)$, $i,j = 1, \dots, N$. Quindi, usando la (6) si ottiene

$$v_t(x_3, t_0) - \frac{v_t(x_1,t_0)+v_t(x_2,t_0)}{2} + b(x_3, v(x_3,t_0)) - \frac{b(x_1, v(x_1,t_0))+b(x_2, v(x_2,t_0))}{2} \leq 0,$$

dove per brevità si è posto $b(x,v) = b(t_0, x, v, p)$.

Poiché $t_0 \in (0,T]$,

$$v_t(x_3, t_0) - \frac{v_t(x_1,t_0)+v_t(x_2,t_0)}{2} = \frac{\partial C_v}{\partial t}(t_0, x_1, x_2) \geq 0$$

((t_0, x_1, x_2) è un punto di massimo) e quindi

$$b(x_3, v(x_3,t_0)) \leq \frac{b(x_1, v(x_1,t_0))+b(x_2, v(x_2,t_0))}{2}.$$

L'ipotesi di concavità implica allora

$$b(x_3, v(x_3, t_0)) \leq b\left(x_3, \frac{v(x_1,t_0)+v(x_2,t_0)}{2}\right)$$

da cui, per la stretta monotonia di b in v, si conclude che $C_v(t_0, x_1, x_2) \leq 0$. $\square$

OSSERVAZIONE. L'ipotesi (ii) in questo caso si può rimuovere facilmente. Posto $v^\varepsilon(x,t) = e^{-\varepsilon t} v(x,t)$ si osserva che

$$v^\varepsilon_t = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(t, e^{\varepsilon t}\nabla v^\varepsilon) \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} - e^{-\varepsilon t} b(t, e^{\varepsilon t} v^\varepsilon, e^{\varepsilon t}\nabla v^\varepsilon) + \varepsilon v^\varepsilon,$$

un'equazione della forma considerata nel TEOREMA 2.

Perciò un eventuale massimo positivo di C_{v^ε} viene assunto in un punto $(t^\varepsilon, x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon)$ tale che o $t^\varepsilon = 0$ o almeno uno tra i punti $x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon$ sta in $\partial\Omega$.

Dato che

$$|v^\varepsilon(x,t) - v(x,t)| \leq |1 - e^{-\varepsilon T}| \max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} |v| \quad , \quad (x,t) \in \overline{\Omega}\times[0,T],$$

allora $v^\varepsilon \to v$ uniformemente in $\overline{\Omega}\times[0,T]$ se $\varepsilon \to 0^+$ e quindi si conclude che anche C_v soddisfa la tesi valida per ogni C_{v^ε}. □