2.5 PRINCIPIO DI MASSIMO PER OPERATORI PARABOLICI

L'operatore

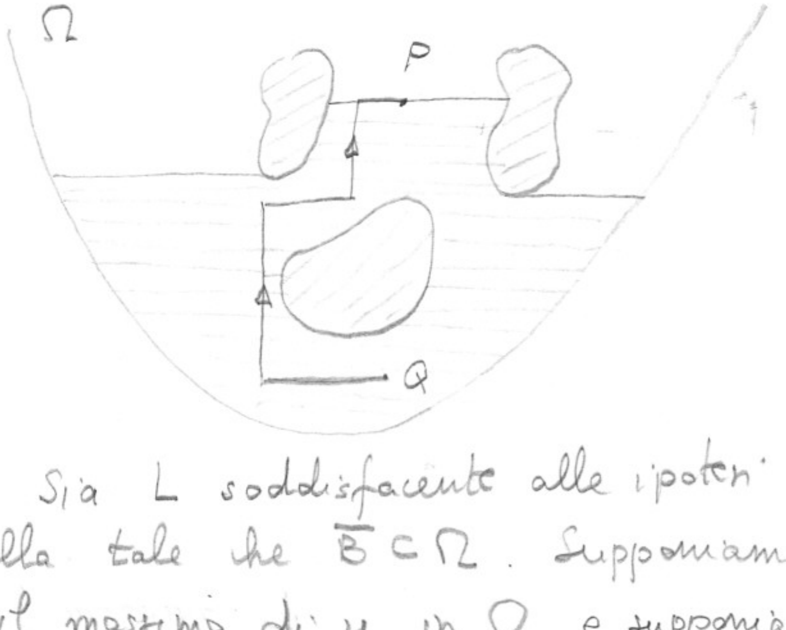
$$(1) \quad L = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t}$$

si dice <u>parabolico</u> in (x,t) se il primo addendo è un operatore ellittico in (x,t). L'operatore L è <u>uniformemente parabolico</u> in un dominio Ω dello spazio-tempo $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ se il primo addendo è uniformemente ellittico in Ω.

TEOREMA. Supponiamo che L sia uniformemente ellittico in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ e che i suoi coefficienti siano limitati in Ω.

Sia $P \in \Omega$ un punto nel quale u assume il suo massimo M in Ω. Indichiamo con $\Omega(\bar{t})$ la componente connessa dell'insieme $\{(x,t) \in \Omega : t = \bar{t}\}$ che contiene P.

Allora, se $L[u] \geq 0$ in Ω, risulta che $u \equiv M$ su $\Omega(\bar{t})$. Inoltre, se Q è un punto di Ω che si può connettere a P con un cammino in Ω fatto solamente di segmenti orizzontali o verticali orientati positivamente, allora $u(Q) = M$.



LEMMA 1. Sia L soddisfacente alle ipotesi del teorema. Sia B una palla tale che $\bar{B} \subset \Omega$. Supponiamo che $L[u] \geq 0$ in Ω.

Sia M il massimo di u in Ω e supponiamo che $u < M$ in B e $u(P) = M$ per qualche $P \in \partial B$.

Allora il piano tangente di B in P è parallelo al piano x, cioè P o è il polo nord o il polo sud di B.

DIM. Siano (x_0, t_0) ed R rispettivamente il centro ed il raggio di B e supponiamo che $P = (x_1, t_1)$ non sia né il polo nord né il polo sud, cioè che $x_1 \neq x_0$.

Possiamo supporre che P sia il solo punto di ∂B in cui $u = M$, altrimenti possiamo rimpicciolire B mantenendola passante per P e tangente alla B originaria.

Poiché $x_1 \neq x_0$, possiamo costruire una palla B_1 con centro in P, raggio $R_1 < |x_1 - x_0|$ e tale che $\overline{B_1} \subset \Omega$.

Siano $C' = \partial B_1 \cap \overline{B}$ e $C'' = \partial B_1 \setminus C'$. Dato che $u < M$ sul compatto C', esisterà $\varepsilon_0 > 0$ tale che $u \leq M - \varepsilon_0$ su C'. Inoltre $u \leq M$ su C'', poiché $u \leq M$ in Ω.

Definiamo ora la funzione

$$v(x,t) = e^{-\alpha[|x-x_0|^2 + (t-t_0)^2]} - e^{-\alpha R^2}, \qquad \alpha > 0,$$

che è positiva in B, nulla su ∂B e negativa fuori di $\overline{B}$.

Calcoliamo:

$$v_t(x,t) = -2\alpha(t-t_0)\, e^{-\alpha[|x-x_0|^2 + (t-t_0)^2]},$$

$$Dv(x,t) = -2\alpha\, e^{-\alpha[|x-x_0|^2 + (t-t_0)^2]}(x-x_0),$$

$$D^2v(x,t) = 2\alpha\, e^{-\alpha[|x-x_0|^2 + (t-t_0)^2]} \left\{ 2\alpha (x-x_0) \otimes (x-x_0) - I \right\},$$

e quindi

$$L[v] = \operatorname{tr}\left[A(x) D^2 v\right] + b(x) \cdot Dv - v_t =$$

$$= 2\alpha\, e^{-\alpha[|x-x_0|^2 + (t-t_0)^2]} \left\{ 2\alpha \langle A(x)(x-x_0), x-x_0 \rangle - \operatorname{tr} A(x) - b(x)(x-x_0) + (t-t_0) \right\}$$

$$\geq 2\alpha\, e^{-\alpha[|x-x_0|^2 + (t-t_0)^2]} \left\{ 2\alpha \mu_0 |x-x_0|^2 - K|x-x_0| - K + t - t_0 \right\}$$

dove K è una costante tale che $|\operatorname{tr} A(x)|, |b(x)| \leq K$ in Ω.

Dato che $|x-x_0| \geq |x_1 - x_0| - R_1 > 0$ per ogni $x \in \overline{B_1}$, possiamo allora scegliere α così grande che $L[v] > 0$ in $\overline{B_1}$.

Costruiamo ora la funzione $w = u + \varepsilon v$; è chiaro che $L[w] = L[u] + \varepsilon L[v] > 0$ in B_1. Inoltre, poiché $u \leq M - \varepsilon_0$ su C', possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ così piccolo che $w < M$ su C'; poiché $v < 0$ su C'', abbiamo $w < M$ su C''.

Perciò $w < M$ su ∂B_1 e $w(x_1, t_1) = u(x_1, t_1) = M$; quindi il massimo di w in $\overline{B_1}$ deve essere assunto in un punto interno di B_1: questo è assurdo perché $L[w] > 0$ in B_1.

OSSERVAZIONE. Si noti che la dimostrazione non funziona se P è uno dei due poli di B, perché se $x_1 = x_0$ non possiamo scegliere $R_1 < |x_1 - x_0|$. .

LEMMA 2. Siano L ed Ω come nel teorema e supponiamo che $L[u] \geq 0$ in Ω.

Sia $u < M$ in qualche punto (x_0, t_0) interno ad Ω e sia $u \leq M$ in Ω.

Se ℓ è un segmento orizzontale contenuto in Ω e contenente (x_0, t_0), allora $u < M$ su ℓ.

Possiamo sempre supporre che $N = 1$.

DIM. Supponiamo che $u(x_1, t_0) = M$ con $(x_1, t_0) \in \ell$. Per convenienza possiamo supporre che (x_1, t_0) sia il primo punto alla sinistra di (x_0, t_0) in cui $u = M$, cosicché $u(x, t_0) < M$ se $x_1 < x \leq x_0$.

Sia

$$d_0 = \min \left[x_0 - x_1, \min_{x_1 \leq x \leq x_0} \operatorname{dist}((x, t_0), \partial\Omega) \right]$$

e, per $x_1 < x < x_1 + d_0$, sia

$$d(x) = \operatorname{dist}\left((x, t_0), \{(x,t) \in \Omega : u(x,t) = M\}\right).$$

Poiché $u(x_1, t_0) = M$, si ha $d(x) \leq x - x_1$.

Per il lemma precedente, il punto più vicino di $\{(x,t) \in \Omega : u(x,t) = M\}$ a (x, t_0) è uno dei due poli della sfera centrata in (x, t_0) e con raggio $d(x)$, cioè risulta o $u(x, t_0 + d(x)) = M$ o $u(x, t_0 - d(x)) = M$.

Poiché la distanza di un punto $(x + \delta, t_0)$ da $(x, t_0 \pm d(x))$ è $\sqrt{d(x)^2 + \delta^2}$, si ha che $d(x+\delta) \leq \sqrt{d(x)^2 + \delta^2} \leq d(x) + \frac{\delta^2}{2d(x)}$.

Ripetendo questo ragionamento, dato che $u(x+\delta, t_0 \pm d(x_0+\delta)) = M$ e che la distanza di $(x+\delta-\delta, t_0)$ da $(x+\delta, t_0 \pm d(x_0+\delta))$ è $\sqrt{d(x+\delta)^2+\delta^2}$, otteniamo che $d(x+\delta) \geq \sqrt{d(x)^2-\delta^2}$.

Supponiamo ora che $d(x) > 0$ e scegliamo $0 < \delta < d(x)$. Applicando le ultime due disuguaglianze per i punti $x + \frac{j+1}{n}\delta$ e $x + \frac{j}{n}\delta$, rispettivamente, otteniamo:

$$d\left(x+\frac{j+1}{n}\delta\right) - d\left(x+\frac{j}{n}\delta\right) = d\left(x+\frac{j}{n}\delta+\frac{\delta}{n}\right) - d\left(x+\frac{j}{n}\delta\right) \leq$$

$$\leq \frac{\delta^2}{2n^2 d\left(x+\frac{j}{n}\delta\right)} \leq \frac{\delta^2}{2n^2\sqrt{d(x)^2-\left(\frac{j}{n}\right)^2\delta^2}} \leq \frac{\delta^2}{2n^2\sqrt{d(x)^2-\delta^2}}$$

e quindi

$$d(x+\delta) - d(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\left[d\left(x+\frac{j+1}{n}\delta\right) - d\left(x+\frac{j}{n}\delta\right)\right] \leq \frac{\delta^2}{2n\sqrt{d(x)^2-\delta^2}},$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e, prendendo il limite per $n \to \infty$, abbiamo:

$$d(x+\delta) \leq d(x) \quad \text{per } \delta \geq 0.$$

In altre parole, $d(x)$ è funzione crescente di x e, poiché $d(x) \leq x - x_1$ e $x - x_1 \to 0^+$ per $x \to x_1^+$, otteniamo che

$$d(x+\delta) = 0 \quad \text{per ogni } 0 < \delta < d(x)$$

e quindi $d(x) = 0$ per ogni $x_1 < x < x_1 + d_0$.

Perciò $u(x, t_0) = M$ per ogni $x \in (x_1, x_1+d_0)$, mentre avevamo supposto che $u(x, t_0) < M$ se $x \in (x_1, x_0)$: questo è assurdo. □

OSSERVAZIONE. Il LEMMA 2 asserisce che se $u = M$ in un punto interno ad Ω, allora $u \equiv M$ su ogni segmento orizzontale contenente tale punto ed il cui interno è contenuto in Ω.

LEMMA 3. Siano Ω ed L come nel teorema e sia $L[u] \geq 0$. Supponiamo che $u < M$ nell'insieme $S = \{(x,t) \in \Omega : t_0 < t < t_1\}$. Allora $u < M$ nello piano $\pi = \{(x,t) \in \Omega : t = t_1\}$.

DIM. Sia $P = (x_1, t_1)$ un punto di π in cui $u = M$. Sia B una palla centrata in P e così piccola che $B \cap \{(x,t) \in \Omega : t = t_0\} = \emptyset$.

Definiamo la funzione

$$v(x,t) = e^{-[(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)]} - 1$$

e calcoliamo:

$$L[v] = e^{-[(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)]}\left\{4 < A(x)(x-x_1), x-x_1 > - 2\,\mathrm{tr}\,A(x) - 2b(x)\cdot(x-x_1) + \alpha\right\}$$

$$\geq e^{-[(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)]}\left\{4\mu_0|x-x_0|^2 - 2K - 2K|x-x_0| + \alpha\right\},$$

Possiamo certamente scegliere α così grande da rendere $L[v]$ positivo in $(S \cup \pi) \cap B$.

Il paraboloide $|x-x_1|^2 + \alpha(t-t_1) = 0$ è tangente al piano $t = t_1$ nel punto P. Siano

$$C' = \partial B \cap \{(x,t) : |x-x_1|^2 + \alpha(t-t_1) \leq 0\},$$

$$C'' = B \cap \{(x,t) : |x-x_1|^2 + \alpha(t-t_1) = 0\},$$

e sia D la regione racchiusa da C' e C''.

Dato che $u < M$ su C', si ha che $u \leq M - \varepsilon_0$ su C' per qualche $\varepsilon_0 > 0$. Come di solito, possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ in modo che la funzione $w = u + \varepsilon v$ abbia le tre proprietà: (i) $L[w] > 0$ in D; (ii) $w < M$ su C'; (iii) $w < M$ su C'' tranne che in P dove $w = M$.

La (i) ci dice che il massimo di w non è assunto in D; (ii) e (iii) ci dicono che il massimo di w è assunto proprio in P e quindi

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x_1,t_1) \geq 0.$$

Dato che $\frac{\partial v}{\partial t}(x_1,t_1) = -\alpha < 0$, otteniamo che

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,t_1) \geq -\varepsilon\,\frac{\partial v}{\partial t}(x_1,t_1) > 0.$$

D'altra parte, poiché il massimo di u su π è assunto in P, abbiamo che $Du(x_1,t_1) = 0$ e $D^2u(x_1,t_1)$ è semi-definita negativa.

Perciò $L[u] \leq -\frac{\partial u}{\partial t} < 0$ in P; in contraddizione con l'ipotesi $L[u] \geq 0$ in Ω.

DIM. DEL TEOREMA. Sia $Q = (\xi, \bar{t})$ un punto di $\Omega(\bar{t})$ in cui $u < M$. Allora l'insieme $\{(x, \bar{t}) \in \Omega(\bar{t}) : u(x, \bar{t}) < M\}$ è non vuoto. Spostando se necessario i punti $(x_0, \bar{t})$ e P possiamo supporre che P e Q siano collegati da un segmento l tutto contenuto in $\Omega(\bar{t})$ e tale che $u < M$ su $l \setminus \{P\}$ e $u(P) = M$. Per il LEMMA 2 otteniamo una contraddizione, dato che se $u(Q) < M$, allora $u < M$ su ogni segmento orizzontale nell'interno di Ω e contenente Q.

Una volta dimostrato che $u = M$ su $\Omega(\bar{t})$, applicando il LEMMA 3 possiamo dimostrare che $u = M$ su ogni segmento verticale che sta sotto $\Omega(\bar{t})$ e con un estremità in $\Omega(\bar{t})$. Possiamo ancora iterare questo ragionamento e dimostrare che $u = M$ in ogni punto al di sotto di $\Omega(\bar{t})$ che può essere collegato a P con un cammino fatto di segmenti orizzontali o verticali orientati dal basso in alto. $\square$

OSSERVAZIONI. (i) È possibile che una funzione soddisfacente $L[u] \geq 0$ assuma il suo massimo in un dominio Ω senza per questo essere identicamente costante.

Se, per esempio, un conduttore è inizialmente a temperatura uniforme M e questa stessa temperatura è mantenuta sul suo contorno fino ad un istante t_1 e dopo questo istante essa viene abbassata, allora da quell'istante in poi la soluzione non è più costante.

Questa è una differenza importante fra il principio di massimo per operatori parabolici e quello per operatori ellittici.

(ii) Siccome i lemmi 1, 2 e 3 concernono solo intorni di punti interni, è sufficiente supporre che i coefficienti a_{ij} e b_i siano limitati e l'operatore sia uniformemente parabolico in ogni sottoinsieme chiuso di Ω.

TEOREMA. Sia L uniformemente parabolico e con coefficienti limitati in un dominio Ω di $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$. Supponiamo che $L[u] \geq 0$ in Ω e che il massimo M di u sia assunto in un punto $P \in \partial\Omega$.

Supponiamo che si possa costruire una palla B tale che $B \subset \Omega$, $P \in \partial B$ e $u < M$ su B; supponiamo inoltre che il raggio congiungente il centro di B a P non sia parallelo all'asse t.

Allora se ν è una direzione esterna a Ω si ha che

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(P) > 0.$$

DIM. Sia $P = (x_0, t_0)$ e siano (x_1, t_1) ed R il centro ed il raggio della palla B tangente a $\partial\Omega$ in P. Sia B_1 una palla centrata in P e raggio minore di R; poniamo $C' = \partial B_1 \cap \overline{B}$, $C'' = \partial B \cap B_1$ e $D = B_1 \cap B$.

Scegliendo B un po' più piccola se necessario, possiamo fare in modo che $u < M$ su ∂B eccetto che in P. Allora, come di solito avremo: (i) $u < M$ su C'' eccetto che in P, (ii) $u(P) = M$, (iii) $u \leq M - \varepsilon_0$ su C' per qualche $\varepsilon_0 > 0$.

La funzione $v(x,t) = e^{-\alpha[|x-x_1|^2 + (t-t_1)^2]} - e^{-\alpha R^2}$ è tale che

$$L[v] = 2\alpha e^{-\alpha[|x-x_1|^2+(t-t_1)^2]} \Big\{ 2\alpha \langle A(x)(x-x_1), x-x_1 \rangle - \operatorname{tr} A(x) -$$

$$- b(x)\cdot(x-x_1) + t - t_1 \Big\} \geq$$

$$\geq 2\alpha e^{-\alpha[|x-x_1|^2+(t-t_1)^2]} \Big\{ 2\alpha \mu_0 |x-x_1|^2 - K - K|x-x_1| + (t-t_1) \Big\}$$

e quindi possiamo scegliere α in modo che $L[v] > 0$ su $\overline{D}$.

La funzione $w = u + \varepsilon v$ può allora essere costruita in modo che $L[w] > 0$ in D, $w < M$ in ∂D eccetto che in P dove $u = M$.

Perciò

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(P) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(P) = \frac{\partial w}{\partial \nu}(P) \geq 0 \, ,$$

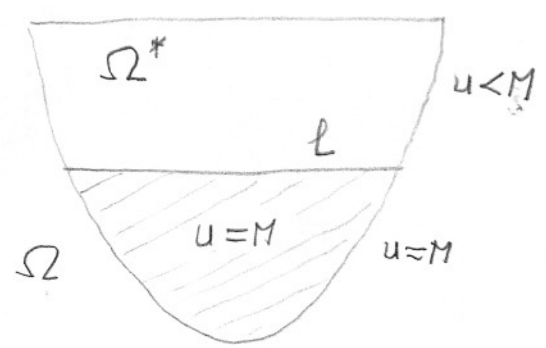
D'altra parte

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(P) = -2\alpha \, \nu \cdot n \, R \, e^{-\alpha R^2} < 0$$

e questo basta per concludere. □

OSSERVAZIONE. Se la normale a $\partial\Omega$ in un punto di massimo è parallela all'asse t, il teorema potrebbe non valere. Infatti abbiamo già osservato che le soluzioni di disuguaglianze paraboliche possono essere costanti in delle regioni.

Si veda la situazione in figura:



La soluzione u ristretta a Ω^* avrà il suo massimo in ℓ e quindi $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ su ℓ e quindi $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su ℓ nella direzione ν parallela all'asse t.

TEOREMA. Le conclusioni dei due teoremi precedenti rimangono valide se $(L+h)[u] \geq 0$, a patto che $h \leq 0$ ed $M \geq 0$.

OSSERVAZIONE. Se $(L+h)[u] \geq 0$ e $v = u \, e^{-\lambda t}$ allora $(L+h-\lambda)[v] \geq 0$.

Se h è limitata superiormente, possiamo scegliere $\lambda = \sup_{\Omega} h$ e ottenere $h - \lambda \leq 0$, cosicché possiamo applicare il principio di massimo a v.

In particolare, il teorema precedente vale con $M=0$ e senza la restrizione $h \leq 0$.