PUNTI CRITICI DI UNA FUNZIONE ARMONICA NEL PIANO, (1)

I risultati ottenuti nel TEOREMA ? possono essere estesi a situazioni più generali al costo di rimpiazzare l'identità ottenuta per i punti critici con una più debole maggiorazione.

Sia $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$; se $\partial\Omega = J^+ \cup J^-$ con $J^+ \cap J^- = \phi$ in modo che $\varphi \geq 0$ su $J^+$ e $\varphi \leq 0$ su $J^-$, indichiamo con $M(J^+)$ il numero di componenti connesse di $J^+$ che sono sottoinsiemi propri di una componente connessa di $\partial\Omega$. Poniamo allora $M$ uguale al minimo di $M(J^+)$ al variare di tali decomposizioni $J^+$, $J^-$ di $\partial\Omega$. Si noti che la definizione di $M$ non cambierebbe se usassimo $M(J^-)$ al posto di $M(J^+)$.

TEOREMA 1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato la cui frontiera $\partial\Omega$ è composta da $n$ curve semplici chiuse $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ di classe $C^{1,\alpha}$. Sia $\alpha : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1$ e di grado

$$D = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial\Omega}(\arg \alpha).$$

Sia infine $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ armonica in $\Omega$ e tale che

$$\nabla u \cdot \alpha = \varphi \quad \text{su } \partial\Omega,$$

dove $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$.

Se $M$ è finito e $u$ non ha punti critici su $\partial\Omega$, allora $u$ ha un numero finito di punti critici in $\Omega$ e, indicate con $m_1, \dots, m_K$ le loro molteplicità, risulta:

$$\sum_{k=1}^{K} m_k \leq M - D.$$

Dim. Introduciamo come di solito la funzione olomorfa $f = u_x - i u_y$, cosicché
$$\sum_{k=1}^{K} m_k = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial\Omega}(\arg f).$$

Sia $J^+, J^-$ una decomposizione di $\partial\Omega$ tale che $M(J^+) = M$. Dato che $\nabla u \cdot \alpha = |\nabla u| |\alpha| \cos(\arg f + \arg \alpha)$, allora

$$|\arg f + \arg \alpha| \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{su } J^+,$$

$$|\arg f + \arg(-\alpha)| \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{su } J^-.$$

Se $\Gamma_j$ è una componente connessa di $\partial\Omega$ tutta contenuta in $J^+$ o in $J^-$, allora

$$\left| \Delta_{\Gamma_j} (\arg f) + \Delta_{\Gamma_j} \arg \alpha \right| = \left| \Delta_{\Gamma_j} (\arg f + \arg \alpha) \right| \leq \pi .$$

Poichè $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma_j} (\arg f + \arg \alpha)$ è intero allora deve essere nullo e quindi

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma_j} (\arg f) = -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma_j} (\arg \alpha) .$$

Se $\Gamma_j$ contiene punti di $J^+$ e $J^-$, allora contiene lo stesso numero di componenti sia di $J^+$ che di $J^-$. Se indichiamo con $M_j$ il numero di componenti di $J^+ \cap \Gamma_j$, allora $\sum_{j=1}^{n} M_j = M$.

Se $\gamma_+$ e $\gamma_-$ sono due componenti consecutive di $J^+ \cap \Gamma_j$ e $J^- \cap \Gamma_j$, rispettivamente, otteniamo che

$$\left| \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma_+ \cup \gamma_-} (\arg f) + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma_+ \cup \gamma_-} (\arg \alpha) \right| \leq 1$$

e quindi

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma_j} (\arg f) \leq -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma_j} (\arg \alpha) + M_j .$$

Sommando infine su $j$, concludiamo che

$$\sum_{k=1}^{K} m_k = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial\Omega} (\arg f) \leq -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial\Omega} (\arg \alpha) + M = M - D . \quad \square$$

Enunciamo senza dimostrazione il seguente teorema che tratta il caso in cui $u$ possa avere dei punti critici su $\partial\Omega$ al costo di richiedere ipotesi più stringenti sui cambi di segno di $\varphi$.

TEOREMA 2.

Siano $\Omega$, $\alpha$, $\varphi$ ed $u$ come nel teorema precedente. Si indichi poi con $M^+$ ed $M^-$ il numero di componenti connesse degli insiemi $I^+ = \{x \in \partial\Omega : \varphi(x) > 0\}$ e $I^- = \{x \in \partial\Omega : \varphi(x) < 0\}$, rispettivamente, che sono sottoinsiemi propri di una componente di $\partial\Omega$.

Se $M^+ + M^-$ è finito, allora

$$\sum_{k=1}^{K} m_k \leq \left[ \frac{M^+ + M^-}{2} \right] - D . \quad \square$$

OSSERVAZIONE. Gli stessi teoremi sui punti critici fin qui visti possono essere dimostrati per soluzioni di equazioni ellittiche della forma

$$(1) \quad a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

dove $a, b$ e $c$ sono funzioni lipschitziane in $\overline{\Omega}$ e $d, e \in L^\infty(\Omega)$. L'equazione si suppone uniformemente ellittica in $\Omega$, richiedendo che

$$ac - b^2 = 1 \quad \text{in } \Omega.$$

Questa estensione fa uso di due risultati della teoria delle funzioni analitiche generalizzate (si veda I. N. Vekua, Generalized Analytic Functions, Pergamon Press, Oxford 1962).

Il primo risultato è il <u>principio</u> <u>di</u> <u>uniformizzazione</u>: esiste un'applicazione <u>quasi</u>-<u>conforme</u> $\zeta : \Omega \to \zeta(\Omega)$, $\zeta(z) = \xi(z) + i\eta(z)$, tale che, se $u(z)$ soddisfa (1), allora $U(\zeta)$ tale che $u(z) = U(\zeta(z))$ è soluzione di

$$(2) \quad \Delta U + P U_\xi + Q U_\eta = 0 \quad \text{in } \zeta(\Omega),$$

con $P, Q \in L^\infty(\zeta(\Omega))$. La (2) si ricava osservando che

$$\partial_x = \partial_z + \partial_{\bar z}, \quad \partial_y = i(\partial_z - \partial_{\bar z}),$$

$$\partial_{xx} = \partial_{zz} + 2\partial_{z\bar z} + \partial_{\bar z\bar z}, \quad \partial_{xy} = i(\partial_{zz} - \partial_{\bar z\bar z}), \quad \partial_{yy} = -\partial_{zz} + 2\partial_{z\bar z} - \partial_{\bar z\bar z},$$

e quindi che

$$(3) \quad A u_{zz} + 2B u_{z\bar z} + \overline{A} u_{\bar z\bar z} + C u_z + \overline{C} u_{\bar z} = 0,$$

dove

$$A = a - c + 2ib, \quad B = a + c, \quad C = d + ie.$$

A questo punto si calcola:

$$u_z = U_\zeta \zeta_z + U_{\bar\zeta} \bar\zeta_z, \quad u_{\bar z} = U_\zeta \zeta_{\bar z} + U_{\bar\zeta} \bar\zeta_{\bar z},$$

$$u_{zz} = U_{\zeta\zeta}\,\zeta_z^2 + 2U_{\zeta\bar\zeta}\,\zeta_z\bar\zeta_z + U_{\bar\zeta\bar\zeta}\,\bar\zeta_z^2 + U_\zeta\,\zeta_{zz} + U_{\bar\zeta}\,\bar\zeta_{zz},$$

$$u_{z\bar z} = U_{\zeta\zeta}\,\zeta_z\zeta_{\bar z} + \left(|\zeta_z|^2 + |\zeta_{\bar z}|^2\right)U_{\zeta\bar\zeta} + U_{\bar\zeta\bar\zeta}\,\bar\zeta_z\bar\zeta_{\bar z} + $$
$$+ U_\zeta\,\zeta_{z\bar z} + U_{\bar\zeta}\,\bar\zeta_{z\bar z},$$

e dalla (3) si ottiene

$$\left(A\zeta_z^2 + 2B\zeta_z\zeta_{\bar z} + \bar A\,\zeta_{\bar z}^2\right)U_{\zeta\zeta} + \overline{\left(A\zeta_z^2 + 2B\zeta_z\zeta_{\bar z} + \bar A\,\zeta_{\bar z}^2\right)}\,U_{\bar\zeta\bar\zeta}$$
$$+ D\,U_{\zeta\bar\zeta} + E\,U_\zeta + F\,U_{\bar\zeta} = 0.$$

La (2) si ottiene azzerando i primi due addendi con la scelta

$$(4) \qquad \zeta_{\bar z} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - |A|^2}}{\bar A}\,\zeta_z,$$

ponendo $P = \frac{E}{D}$, $Q = \frac{F}{D}$, e osservando che

$$\Delta U = 4\,U_{\zeta\bar\zeta}.$$

Si noti che

$$k = \frac{-B + \sqrt{B^2 - |A|^2}}{\bar A} = \frac{-(a+c) + \sqrt{4ac - 4b^2}}{a - c - 2ib},$$

e quindi

$$(5) \qquad |k|^2 = \frac{(a+c-2)^2}{(a-c)^2 + 4b^2} = \frac{(a+c-2)^2}{(a+c)^2 - 4} = \frac{a+c-2}{a+c+2} < 1.$$

Posto $F(\zeta) = U_\xi(\zeta) - i\,U_\eta(\zeta)$ si ottiene da (2) che

$$(6) \qquad F_{\bar\zeta} + RF + \bar R\,\bar F = 0 \quad \text{in } \zeta(\Omega),$$

dove $4R = P + iQ$.

Le soluzioni di equazioni del tipo (6) si dicono

funzioni analitiche generalizzate o pseudo-analitiche.
Esse godono del seguente principio di similarità: esistono $s(\xi)$ hölderiana in $\mathbb{C}$ e $G(\xi)$ olomorfa in $\xi(\Omega)$, tali che

$$F(\xi) = e^{s(\xi)} G(\xi) \quad , \quad \xi \in \xi(\Omega) ,$$

ed $s(\xi)$ si può scegliere in modo che abbia valori reali sulla frontiera di $\xi(\Omega)$.

Da questa formula segue allora che ogni punto critico $z_0$ di $u$ è isolato ed ha molteplicità finita $m_0$ (dato che $\xi_0 = \xi(z_0)$ è uno zero di $G(\xi)$).

OSSERVAZIONE. Un'applicazione quasi-conforme si può definire in vari modi; uno di questi è più appropriato nello studio delle equazioni ellittiche.

Si dice che un omeomorfismo $\xi : \Omega \to \xi(\Omega)$ è K-quasi-conforme se possiede derivate generalizzate localmente in $L^2(\Omega)$ e se esiste $0 \leq K < 1$ tale che

$$(7) \qquad |\xi_{\bar z}| \leq K |\xi_z| \quad \text{q.o. in } \Omega .$$

È chiaro che la (5) implica che la $\xi$ definita da (4) è K-quasi-conforme con $K = \max_{\bar\Omega} \dfrac{a+c-2}{a+c+2}$.

Si noti che la (7) è equivalente a

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 + \eta_x^2 + \eta_y^2 \leq 2\,\frac{K+1}{1-K}\,(\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x) \quad \text{q.o. in } \Omega ,$$

Si osservi infine che $\xi$ è conforme quando $K=0$; ciò si verifica se e solo se $a+c=2$ e cioè se e solo se $a=c$ e $b=0$.

OSSERVAZIONE. Un'ulteriore generalizzazione si ottiene per equazioni uniformemente ellittiche in forma di divergenza:

$$(8) \qquad \operatorname{div}(A \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega ,$$

dove $A$ è una matrice simmetrica $2 \times 2$ a coefficienti in

$L^\infty(\Omega)$. Dato che le soluzioni $u$ di (8) potrebbero essere solo hölderiane, è necessario specificare che cosa si intende per un punto critico di $u$.

Si osserva che la (8) implica che la forma differenziale $\eta = -(a_{12} u_x + a_{22} u_y)\,dx + (a_{11} u_x + a_{12} u_y)\,dy$ è esatta in $\Omega$ (se $\Omega$ è semplicemente connesso); esiste allora una funzione $v$ tale che $dv = \eta$; $v$ è una sorta di funzione armonica coniugata di $u$. Ponendo $f = u + iv$, si verifica che

$$f_{\bar z} = \mu f_z + \nu \overline{f_z} \quad \text{in } \Omega$$

e quindi che

$$|f_{\bar z}| \le (|\mu| + |\nu|)\,|f_z| \quad \text{in } \Omega, \tag{9}$$

dove $|\mu| + |\nu| < 1$ (i coefficienti $\mu$ e $\nu$ dipendono da $A$, che è ellittica). La teoria delle applicazioni quasi-regolari di Bers e Nirenberg ci fornisce un teorema di rappresentazione: se $f$ soddisfa la (9), esistono un'applicazione quasi-conforme $\chi : \Omega \to B(0,1)$ ed una funzione olomorfa $F$ in $B(0,1)$ tali che $f(z) = F(\chi(z))$.

In virtù di questi risultati, si dice che $z_0 \in \Omega$ è un punto critico geometrico di $u$ se $\zeta_0 = \chi(z_0) \in B(0,1)$ è un punto critico di $U(\zeta) = \mathrm{Re}\, F(\zeta)$. È chiaro che i punti critici geometrici di $u$ sono isolati, perché lo sono quelli di $U$.

Si può infine definire una molteplicità $m_0$ di $z_0$:

$$m_0 = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\chi(\partial B(z_0,\varepsilon))} (\arg F'),$$

dove risulta che $F'(\zeta) = 2\partial_\zeta U(\zeta)$.

Con questi accorgimenti si possono generalizzare i TEOREMI 1 e 2 al caso di equazioni ellittiche. (Si vedano gli articoli G. Alessandrini – R. Magnanini, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 19 (1992), 567–589 e G. Alessandrini – R. Magnanini, SIAM J. Math. Anal. 25 (1994), 1259–1268.