PUNTI CRITICI DI UN POTENZIALE DI CAPACITÀ

L'uso delle funzioni di una variabile complessa fornisce informazioni molto dettagliate sul numero dei punti critici delle soluzioni di equazioni ellittiche nel piano. In quel che segue, faremo uso di due risultati importanti della teoria delle funzioni olomorfe (il principio dell'argomento ed il teorema della mappa di Riemann) e del principio di riflessione di Schwarz, che vale in dimensione qualsiasi.

TEOREMA (Principio di riflessione di Schwarz)

Sia u armonica nella semisfera $B_+(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1, x_N > 0\}$, continua in $\overline{B_+(0,1)}$ e nulla su $\partial B_+(0,1) \cap \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\}$.

Sia $v : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}$ definita da

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \overline{B_+(0,1)}, \\ -u(\bar{x}) & \text{se } \bar{x} \in \overline{B_+(0,1)}, \end{cases}$$

dove $\bar{x} = (x', -x_N) = (x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N)$.

Allora v è armonica in $B(0,1)$.

Dim. Dato che v è continua su $\partial B(0,1)$, per la formula integrale di Poisson, esiste w armonica in $B(0,1)$ e tale che $w = v$ su $\partial B(0,1)$. Posto $\omega(x) = w(x) + w(\bar{x})$ per $x \in B(0,1)$, $\omega \equiv 0$ in $\overline{B(0,1)}$, dato che $\omega = 0$ su $\partial B(0,1)$ ed ω è armonica in $B(0,1)$. In particolare, $2w(x', 0) = \omega(x', 0) = 0$, cioè $w = u$ su $\partial B_+(0,1) \cap \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\}$ e quindi $w = u$ su $\partial B_+(0,1)$. Perciò $w \equiv u$ su $\overline{B_+(0,1)}$ e quindi

$$w(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \overline{B_+(0,1)}, \\ -w(\bar{x}) = -u(\bar{x}), & \text{se } \bar{x} \in \overline{B_+(0,1)}, \end{cases}$$

cioè $v = w$ in $B(0,1)$ e w è armonica. □

OSSERVAZIONE. È chiaro che il teorema appena dimostrato si può estendere al caso in cui $B(0,1)$ è rimpiazzata da un dominio Ω simmetrico rispetto al piano $x_N = 0$. Dobbiamo solamente assicurarci che esista la soluzione del problema

$$\Delta w = 0 \text{ in } \Omega, \quad w = v \text{ su } \partial\Omega,$$

dove v è definita in modo analogo in Ω. Dato che questa v è continua su $\partial\Omega$, basterà richiedere che tutti i punti di $\partial\Omega$ siano regolari.

OSSERVAZIONE. Nel teorema che segue, si parlerà dei punti critici di una funzione armonica u e della loro molteplicità. Dato che un punto critico di u è anche uno zero della funzione olomorfa $f = u_x - i u_y$, per molteplicità di un punto critico di u intendiamo la molteplicità del corrispondente zero di f.

TEOREMA. Sia Ω un dominio limitato del piano e supponiamo che $\partial\Omega$ sia composto da n curve semplici chiuse $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, $n \geq 2$, di classe $C^{1\alpha}$.

Sia $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ la soluzione del problema di Dirichlet:

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega,$$
$$u = a_j \text{ su } \Gamma_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

dove $a_1, \dots, a_n$ sono costanti, non tutte uguali tra loro.

Allora

(i) u ha un numero finito di punti critici $z_1, \dots, z_K$ in $\overline{\Omega}$ con molteplicità finite $m(z_1), \dots, m(z_K)$;

(ii) vale l'identità

$$\sum_{z_k \in \Omega} m(z_k) + \frac{1}{2} \sum_{z_k \in \partial\Omega} m(z_k) = n - 2.$$

In particolare, $\nabla u \neq 0$ su $\overline{\Omega}$, se Ω è duplicemente connesso (i.e. $n = 2$).

Il seguente lemma serve a trattare il caso in cui $z_k \in \partial\Omega$,

LEMMA. Sia $z_0 \in \partial\Omega$ un punto critico di u, sia $f = u_x - i u_y$ e supponiamo che

$$f(z) = (z - z_0)^{m_0} g(z) \quad \text{con } g(z_0) \neq 0,$$

per $z \in \Omega$, dove $g(z)$ è olomorfa in Ω.

Se $+\Sigma_\varepsilon$ indica l'arco $\{z \in \Omega : |z - z_0| = \varepsilon\}$ percorso in senso anti-orario, allora

$$\Delta_{+\Sigma_\varepsilon} (\arg f) = \pi m_0,$$

se $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo.

Dim. Sia Γ_j la componente connessa di $\partial\Omega$ contenente z_0. Per il teorema della mappa di Riemann, esiste un'applicazione conforme χ che trasforma Γ_j nell'asse reale, l'esterno di Γ_j (in $\mathbb{C}$) nel semipiano con parte immaginaria positiva e tale che $\chi(z_0) = 0$. Posto $D = \chi(\Omega)$, $\tilde{\Omega}$ sarà contenuto in quel semipiano e χ risulta biunivoca da $\overline{\Omega}$ in $\overline{D}$ e di classe $C^1(\overline{\Omega})$.

Dato che χ è olomorfa, la funzione $U(w) = u(\chi^{-1}(w)) - u(z_0)$ è armonica per $w \in D$, nulla su $\chi(\Gamma_j)$ ed ha un punto critico in $w = 0$. Per il principio di riflessione di Schwarz, la funzione

$$V(w) = \begin{cases} U(w) & \text{se } w \in \overline{D}, \\ -U(\overline{w}) & \text{se } \overline{w} \in \overline{D}, \end{cases}$$

è armonica in tutto l'insieme $D \cup \{w \in \mathbb{C} : \overline{w} \in D\} \cup \chi(\Gamma_j)$.

La funzione $F(w) = 2\partial_w V(w)$ è quindi olomorfa in tale insieme ed inoltre

$$F(w) = 2\partial_z u(\chi^{-1}(w)) \frac{\partial \chi^{-1}}{\partial w}(w) = f(\chi^{-1}(w)) \frac{\partial \chi^{-1}}{\partial w}(w) =$$

$$= [\chi^{-1}(w) - \chi^{-1}(0)]^{m_0} g(\chi^{-1}(w)) \frac{\partial \chi^{-1}}{\partial w}(w) = w^{m_0} G(w),$$

dove

$$G(w) = \left[\frac{\chi^{-1}(w) - \chi^{-1}(0)}{w}\right]^{m_0} g(\chi^{-1}(w)) \frac{d\chi^{-1}(w)}{dw}$$

e $G(0) = g(z_0)\left[\frac{d\chi^{-1}}{dw}(0)\right]^{m_0+1} \neq 0$, dato che $g(z_0) \neq 0$ e χ^{-1} è conforme in $w=0$.

Per il principio dell'argomento allora

$$\Delta_{+\gamma}(\arg F) = 2\pi m_0,$$

per ogni curva semplice chiusa (orientata positivamente in senso anti-orario), contenente $w=0$ al suo interno ed abbastanza vicina a $w=0$. Scegliamo $+\gamma$ come l'unione di $\chi(+\Sigma_\varepsilon)$ e della sua riflessione rispetto all'asse reale (con orientamento concorde a quello di $\chi(+\Sigma_\varepsilon)$). Risulta:

$$\Delta_{+\Sigma_\varepsilon}(\arg f) = \Delta_{\chi(\Sigma_\varepsilon)}(\arg F) = \frac{1}{2}\Delta_{+\gamma}(\arg F) = \pi m_0.$$

(Si noti che $F(w) = f(\chi^{-1}(w)) \frac{d\chi^{-1}}{dw}(w)$ e $\frac{d\chi^{-1}}{dw} \neq 0$.) $\square$

Dim. del teorema. (i) Poiché f è olomorfa in Ω, i suoi zeri in Ω sono isolati e con molteplicità finita. Inoltre, ogni eventuale zero di f appartenente a $\partial\Omega$ non può essere un punto di accumulazione di altri zeri di f: questo perché possiamo ripetere il ragionamento fatto nella dimostrazione precedente ed ottenere una funzione olomorfa $F(w)$ in un intorno di $w=0$, che è uno zero isolato di $F(w)$.

(ii) Poniamo $\mathcal{B}_\varepsilon = \bigcup_{z_k \in \partial\Omega} \overline{B(z_k, \varepsilon)}$ ed $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \mathcal{B}_\varepsilon$. Se $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo, tutti i punti critici di u interni ad Ω sono interni anche a Ω_ε e quindi

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{+\partial\Omega_\varepsilon}(\arg f) = \sum_{z_k \in \Omega} m(z_k),$$

per il principio dell'argomento.

D'altra parte

$$\Delta_{+\partial\Omega_\varepsilon}(\arg f) = \sum_{z_k\in\partial\Omega} \Delta_{-\Sigma_\varepsilon(z_k)}(\arg f) + \Delta_{+(\partial\Omega\setminus B_\varepsilon)}(\arg f),$$

dove $-\Sigma_\varepsilon(z_k) = \partial B(z_k,\varepsilon)\cap\Omega$ (con l'orientamento su $\partial B(z_k,\varepsilon)$ indotto da quello di $+\partial\Omega_\varepsilon$). Per il lemma si ha allora

$$2\pi\sum_{z_k\in\Omega} m(z_k) = -\pi\sum_{z_k\in\partial\Omega} m(z_k) + \Delta_{+(\Gamma_1\setminus B_\varepsilon)}(\arg f) -$$
$$-\sum_{j=2}^{n} \Delta_{+(\Gamma_j\setminus B_\varepsilon)}(\arg f),$$

dove Γ_1 è la componente di $\partial\Omega$ che circonda le restanti $\Gamma_2,\dots,\Gamma_n$. Si noti che ora ogni Γ_j è orientata in senso anti-orario.

Su $\partial\Omega\setminus B_\varepsilon$ la direzione di ∇u è parallela al versore della normale esterna. Si noti però che ∇u potrebbe cambiare verso su $\partial\Omega$ nell'attraversare un punto critico. In altre parole, la derivata normale di u potrebbe cambiare segno (e precisamente nell'attraversare i punti critici di molteplicità dispari). Poiché questa è continua su ogni Γ_j, ad ogni suo cambiamento di segno deve corrispondere un cambiamento in senso opposto e quindi l'aumento di $\arg f$ su Γ_j è uguale a quello di $-\arg\nu$ su Γ_j. In altre parole, si ha:

$$\Delta_{+(\Gamma_j\setminus B_\varepsilon)}(\arg f) = -\Delta_{+(\Gamma_j\setminus B_\varepsilon)}(\arg\nu), \quad j=1,\dots,n,$$

e quindi

$$\sum_{z_k\in\Omega} m(z_k) + \frac{1}{2}\sum_{z_k\in\partial\Omega} m(z_k) = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\Delta_{+(\partial\Omega\setminus B_\varepsilon)}(\arg\nu) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\Delta_{+\Gamma_1}(\arg\nu) + \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{2\pi}\Delta_{+\Gamma_j}(\arg\nu) = n-2,$$

dove l'ultima uguaglianza segue, per esempio, dal teorema di Gauss-Bonnet. □