ANALITICITÀ E APPLICAZIONI.

Sia v armonica in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Sappiamo già che $v \in C^\infty(\Omega)$; dimostriamo ora che v è analitica in Ω, cioè v è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di ogni punto fissato in Ω.

Fissiamo un punto in Ω: possiamo sempre supporre che tale punto sia l'origine. Sia inoltre $R>0$ tale che $\overline{B_R} = \overline{B_R(0)} \subset \Omega$; allora $v \in C^\infty(\partial B_R)$ e possiamo scrivere la formula di Poisson

$$u(x) = \frac{R^2-|x|^2}{\omega_N R} \int_{\partial B_R} \frac{u(y)}{|x-y|^N}\, dS_y \,, \quad x \in B_R .$$

Si noti ora che, per $y \in \partial B_R$ si ha che

$$|x-y|^{-N} = \left(|x|^2 - 2x\cdot y + |y|^2\right)^{-N/2} = \left(|x|^2 - 2x\cdot y + R^2\right)^{-N/2} =$$

$$= R^{-N}\left(1 + \frac{|x|^2-2x\cdot y}{R^2}\right)^{-N/2}.$$

Perciò, se $|x| \leq r$ ed $r < R(\sqrt{2}-1)$, si ha che $\left||x|^2 - 2x\cdot y\right| \leq |x|^2 + 2|x||y| \leq r^2 + 2rR < R^2$ e quindi

$$|x-y|^{-N} = R^{-N}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-N/2}{n}\left(\frac{|x|^2-2x\cdot y}{R^2}\right)^n$$

e la serie converge totalmente in $\overline{B_r(0)}$. Dunque, possiamo scrivere che

$$\frac{1}{\omega_N R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^N} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+2}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(y)\, x^\alpha ,$$

dove $P_{2n+2}(x,y)$ sono polinomi di grado $2n+2$ in (x,y).

Concludendo

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=n} \hat{a}_\alpha x^\alpha \quad \text{dove } \hat{a}_\alpha = \int_{\partial B_R} v(y)\, a_\alpha(y)\, dS_y .$$

APPLICAZIONE. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato e convesso e sia u l'unica soluzione di classe $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ del problema

(1) $-\Delta u = 1$ in Ω, $u = 0$ su $\partial\Omega$.

Allora gli insiemi di livello $\Omega_t = \{x \in \Omega : u(x) > t\}$ sono strettamente convessi per ogni $0 < t < \max_{\overline{\Omega}} u$.

Inoltre, se $t = \max_{\overline{\Omega}} u$, Ω_t contiene un solo punto.

Infine, $\partial\Omega_t$ è una superficie analitica per $0 < t < \max_{\overline{\Omega}} u$.

Dim. (i) Sia $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di domini strettamente convessi e con $\partial\Omega_n \in C^1$ tali che $|\Omega \setminus \Omega_n| \to 0$ per $n \to \infty$. Ciascuna funzione $v_n = -\sqrt{u_n}$ è convessa in Ω_n, se u_n è la soluzione di (1) relativa ad Ω_n.

Per il principio di massimo

$$\max_{\overline{\Omega_n}} (u - u_n) = \max_{\partial\Omega_n} u \to 0 \quad \text{se } n \to \infty.$$

Quindi $u_n(x) \to u(x)$ per ogni $x \in \Omega$ se $n \to \infty$ e perciò anche $v = -\sqrt{u}$ è convessa; ne segue che ogni Ω_t è convesso.

(ii) Si osservi che u è analitica in Ω, dato che

$$u(x) = -\frac{|x|^2}{2N} + V(x) \quad \text{con } \Delta V = 0 \text{ in } \Omega.$$

(iii) Se Ω_t non fosse strettamente convesso, allora la sua frontiera $\partial\Omega_t$ conterrebbe un segmento σ e su questo segmento u sarebbe una funzione analitica di una variabile costante uguale a $t > 0$ su σ. Allora u sarebbe uguale a t su tutta la retta che contiene σ e perciò t sarebbe nullo, dato che $u = 0$ nel punto di $\partial\Omega$ intersecato da quella retta. Questo è assurdo.

3

(iv) Se l'insieme Ω_t con $t = \max_{\Omega} u$ contenesse due punti distinti, allora conterrebbe anche il segmento che li unisce e quindi si procede come in (iii).

(v) Se $0 < t < \max_{\Omega} u$, allora $\partial\Omega_t$ non contiene punti critici di u e quindi, per il teorema del Dini, è localmente il grafico di una funzione regolare quanto lo è u. $\square$