APPLICAZIONI DEL PRINCIPIO DI MASSIMO PER LA CONCAVITÀ.

Nelle applicazioni ai problemi al contorno, se vogliamo dimostrare la convessità di una soluzione, dobbiamo trovare condizioni su di essa che impediscano alla sua funzione concavità di assumere massimo positivo sul bordo $\partial(\Omega\times\Omega)$.

TEOR. 1. Sia $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ limitato, con frontiera di classe C^1 e strettamente convesso.

Sia $u\in C^1(\overline{\Omega})$ e tale che

(1) $u>0$ in Ω, $u=0$ e $u_\nu<0$ su $\partial\Omega$,

dove ν indica il versore della normale esterna a $\partial\Omega$;

Sia infine $g\in C^0([0,+\infty))\cap C^1((0,+\infty))$ e tale che

(2) $g'<0$ in $(0,+\infty)$ e $\lim\limits_{u\to 0^+} g'(u)=-\infty$.

Sia $v(x)=g(u(x))$; allora C_v non ammette massimo positivo su $\partial(\Omega\times\Omega)$.

Dim. È chiaro che $v\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$ e quindi C_v è continua su $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$. Sia $(x_1,x_2)\in\partial(\Omega\times\Omega)$ tale che

$$C_v(x_1,x_2)=\max_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} C_v>0;$$

allora $x_1\neq x_2$ e quindi $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}\in\Omega$, dato che Ω è strettamente convesso. Perciò $u(x_3)>0$.

(A) Se $x_1,x_2\in\partial\Omega$, allora

$$v(x_3)-v(x_i)=g(u(x_3))-g(u(x_i))=g(u(x_3))-g(0)=$$
$$=g'(\vartheta u(x_3))\,u(x_3)<0,\quad i=1,2,$$

dove $\vartheta\in(0,1)$ esiste per il teorema di Lagrange.

Quindi $C_v(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{2}\frac{v(x_3)-v(x_i)}{2}<0$,

che è una contraddizione.

(B) Se $x_2 \in \partial\Omega$ e $x_1 \in \Omega$, sia $\nu = \nu(x_2)$; esiste allora $\varepsilon_0 > 0$ tale che $C_v(x_1, x_2 - \varepsilon\nu) \leq C_v(x_1, x_2)$ per $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e quindi

$$0 \leq \frac{C_v(x_1,x_2) - C_v(x_1, x_2 - \varepsilon\nu)}{\varepsilon} = \frac{v(x_3) - v(x_3 - \frac{1}{2}\varepsilon\nu)}{\varepsilon} - \frac{v(x_2) - v(x_2 - \varepsilon\nu)}{2\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{2} Dv(x_3 - \tfrac{1}{2}\vartheta_3 \varepsilon\nu)\cdot\nu - \frac{1}{2} Du(x_2 - \vartheta_2 \varepsilon\nu)\cdot\nu =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ g'(u(x_3 - \tfrac{1}{2}\vartheta_3\varepsilon\nu))\, Du(x_3 - \tfrac{1}{2}\vartheta_3\varepsilon\nu) - g'(u(x_2 - \vartheta_2\varepsilon\nu))\, Du(x_2 - \vartheta_2\varepsilon\nu)\right\}\cdot\nu$$

per $0 < \vartheta_2, \vartheta_3 < 1$. Passando al limite (inferiore) per $\varepsilon \to 0^+$, otteniamo una contraddizione:

$$0 \leq \frac{1}{2}\left\{ g'(u(x_3))\, Du(x_3)\cdot\nu - u_\nu(x_3) \lim_{u \to 0^+} g'(u)\right\} = -\infty .$$

□

Esempio 1. Sia Ω limitato, con frontiera di classe C^1, strettamente convesso e tale che, per ogni $x \in \partial\Omega$, esiste una pallina $B \subset \Omega$ tale che $x \in \partial B$.

Sia $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ la soluzione del problema

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega .$$

Per il principio di massimo forte $u > 0$ in Ω, mentre $u_\nu < 0$ per il lemma di Hopf; perciò:

$$u \in C^1(\overline{\Omega}), \quad u > 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ e } u_\nu < 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

cioè u soddisfa la (1).

La funzione $g(u) = -\sqrt{u}$ inoltre soddisfa la (2) e, posto $v(x) = g(u(x))$ per $x \in \overline{\Omega}$, abbiamo che

$$\Delta v = -\frac{1}{v}\left(\frac{1}{2} + |Dv|^2\right) \quad \text{e} \quad v < 0 \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ su } \partial\Omega .$$

Per il TEOR. 1, C_v non può avere un massimo positivo su $\partial(\Omega\times\Omega)$. D'altra parte, in questo caso

$$b(x, v, p) = -\frac{1}{v}\left(\frac{1}{2} + |p|^2\right) \quad \text{con} \quad v < 0$$

e quindi b è positiva e strettamente crescente, mentre $b(x,v,p)^{-1}$ è convessa in (x,v) per ogni $p \in \mathbb{R}^N$ fissato.

Per il principio di massimo per la concavità, C_v non può avere massimo positivo in $\Omega\times\Omega$. Dunque $C_v \leq 0$ su $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ e cioè v è convessa. Di conseguenza, gli insiemi di livello

$$\{x\in\Omega : u(x)>t\} = \{x\in\Omega : v(x) < -\sqrt{t}\}$$

sono convessi per ogni $0\leq t \leq \max_{\Omega} u$.

Nel caso appena esaminato, la funzione v risulta continua su $\overline{\Omega}$. Per certe applicazioni, ciò non basta.

TEOR. 2. Sia Ω limitato, con frontiera di classe C^2 e fortemente convesso (cioè $\partial\Omega$ ha curvature sezionali positive rispetto alla normale interna).

Sia $u\in C^2(\overline{\Omega})$ soddisfacente alla (1) e sia $f\in C^2((0,+\infty))$ tale che

(i) $f'<0$; (ii) $\lim_{u\to 0^+} f'(u) = -\infty$; (iii) $f''>0$;

(iv) $\lim_{u\to 0^+} \frac{f'(u)}{f''(u)} = 0$; $\lim_{u\to 0^+} \frac{f(u)}{f'(u)} = 0$.

Allora, se $v=f(u)$, C_v non ha un massimo positivo in $\partial(\Omega\times\Omega)$.

DIM. È chiaro che, se $f\in C^0([0,+\infty))$, possiamo applicare il TEOR. 1 ed ottenere la tesi.

Altrimenti dovrà essere che

$$\lim_{u\to 0^+} f(u) = +\infty$$

e cioè che $v=+\infty$ su $\partial\Omega$.

Supponiamo ora che esistano due successioni di punti tali che $C_v(x_1^n, x_2^n)$ tende ad un limite positivo ℓ e $\mathrm{dist}(x_1^n,\partial\Omega)$, $\mathrm{dist}(x_2^n,\partial\Omega) \to 0$ per $n\to\infty$.

Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che esistano x_1 ed $x_2 \in \partial\Omega$ tali che $x_1^n \to x_1$ e $x_2^n \to x_2$ per $n \to \infty$. Poiché Ω è strettamente convesso, $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$ appartiene ad Ω se $x_1 \neq x_2$ e quindi

$$0 < \lim_{n\to\infty} C_v(x_1^n, x_2^n) = v(x_3) - \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} [v(x_1^n) + v(x_2^n)] = -\infty.$$

Perciò deve essere $x_1 = x_2 = x \in \partial\Omega$.

Definiamo allora $\vartheta_n \in \mathbb{S}^{N-1}$ come $\vartheta_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{|x_1^n - x_2^n|}$; a meno di sottosuccessioni, esisterà $\vartheta \in \mathbb{S}^{N-1}$ tale che $\vartheta_n \to \vartheta$ per $n \to \infty$. Abbiamo allora due possibilità.

(A) $\vartheta \cdot \nu(x) \neq 0$; dato che

$$D^2 v = f''(u)\, Du \otimes Du + f'(u)\, D^2 u, \tag{3}$$

avremo che

$$\langle D^2 v\, \vartheta_n, \vartheta_n \rangle = f''(u) \left\{ (Du \cdot \vartheta_n)^2 + \frac{f'(u)}{f''(u)} \langle D^2 u\, \vartheta_n, \vartheta_n \rangle \right\}$$

in x_1^n (oppure in x_2^n), e quindi per la (iv) e la (iii) otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} \langle D^2 v(x_i^n)\, \vartheta_n, \vartheta_n \rangle = u_\nu(x)^2 [\vartheta \cdot \nu(x)]^2 \lim_{n\to\infty} f''(u(x_i^n)) = +\infty$$

per $i = 1, 2$. Per continuità, possiamo allora affermare che v è convessa sul segmento $\overline{x_1^n x_2^n}$, se n è abbastanza grande, e cioè $C_v(x_1^n, x_2^n) \leq 0$ definitivamente, contro il fatto che $\ell > 0$.

(B) $\vartheta \cdot \nu(x) = 0$; in questo caso $\vartheta \in T_x(\partial\Omega)$ e

$$\langle D^2 v\, \vartheta_n, \vartheta_n \rangle = f''(u)(Du \cdot \vartheta_n)^2 + f'(u) \langle D^2 u\, \vartheta_n, \vartheta_n \rangle \geq$$
$$\geq f'(u) \langle D^2 u\, \vartheta_n, \vartheta_n \rangle,$$

per la (3), e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \langle D^2 v\, \theta_n, \theta_n \rangle \geq \langle D^2 u(x)\theta, \theta \rangle \lim_{u\to 0^+} f'(u).$$

Basterà quindi dimostrare che $\langle D^2 u(x)\, \theta, \theta \rangle < 0$ per poter concludere come al punto (A).

Sia allora $s \longmapsto x(s) \in \partial\Omega$ una curva regolare (parametrizzata secondo la sua lunghezza d'arco e tale che $x(0) = x$ e $x'(0) = \theta$. Dato che $u(x(s)) = 0$ per ogni s, derivando due volte rispetto ad s, abbiamo che

$$\langle D^2 u(x(s))\, x'(s), x'(s) \rangle + Du(x(s)) \cdot x''(s) = 0$$

e quindi

$$\langle D^2 u(x)\, \theta, \theta \rangle = -Du(x) \cdot x''(0) = u_\nu(x)\, k_\theta(x) < 0$$

per la (1), dato che la curvatura (sezionale) $k_\theta(x)$ è positiva; ciò conclude la dimostrazione. □

Esempio 2. Sia ϕ_1 la prima autofunzione di Dirichlet, cioè

$$\Delta\phi_1 + \lambda_1 \phi_1 = 0 \quad \text{e} \quad \phi_1 > 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \phi_1 = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

con $\lambda_1 > 0$. Se vale la proprietà della pallina interna per Ω, ϕ_1 soddisfa (1) per il lemma di Hopf. Inoltre $f(u) = -\log \phi_1$ soddisfa le ipotesi (i)–(v) ed inoltre $v(x) = -\log \phi_1(x)$ è soluzione dell'equazione

$$\Delta v = \lambda_1 + |Dv|^2 \quad \text{in } \Omega$$

e $v = +\infty$ su $\partial\Omega$. In questo caso, $b(x, v, p) = \lambda_1 + |p|^2$, che è non-negativa, crescente in v e $b(x, v, p)^{-1}$ è convessa (costante) in (x, v).

Per il principio di massimo per la concavità ed il TEOR. 2, v è convessa in Ω e quindi gli insiemi di livello

$$\{x \in \Omega : \phi_1(x) \geq t\} = \{x \in \Omega : v(x) \leq -\log t\}$$

sono convessi per ogni $0 \leq t \leq \max_{\Omega} \phi_1$.