APPLICAZIONI DEL PRINCIPIO DI MASSIMO PER LA CONCAVITA'

Nelle applicazioni ai problemi al contorno, se vogliamo dimostrare che una soluzione è convessa, dobbiamo trovare condizioni su di essa che impediscano alla funzione concavità $\mathcal{C}$ di assumere massimo positivo su $\partial\Omega$.

LEMMA 1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato e strettamente convesso. Sia $v \in C^0(\Omega)$ limitata inferiormente su $\overline{\Omega}$ e tale che $v(x) \to +\infty$ uniformemente se $dist(x, \partial\Omega) \to 0$.

Allora $\mathcal{C}_v(x_1, x_2)$ non può diventare positiva quando (x_1, x_2) si avvicina a $\partial(\Omega \times \Omega)$.

Dim. Se così non fosse esisterebbero due successioni di punti x_n^1 ed $x_n^2 \in \Omega$ tali che $d(x_n^1, \partial\Omega), d(x_n^2, \partial\Omega) \to 0$ se $n \to \infty$ e

(1) $$\limsup_{n \to +\infty} \mathcal{C}_v(x_n^1, x_n^2) > 0.$$

A meno di sottosuccessioni, possiamo supporre che esistano x_1 ed $x_2 \in \partial\Omega$ tali che $x_n^i \to x_i$, $i = 1, 2$, se $n \to \infty$. Poichè Ω è strettamente convesso, $\frac{x_1 + x_2}{2} \in \Omega$ e quindi $v\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ è finito.

Perciò

$$\limsup_{n \to \infty} \mathcal{C}_v(x_n^1, x_n^2) = v\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{1}{2} \liminf_{n \to \infty} \{ v(x_n^1) + v(x_n^2) \} = -\infty,$$

che è in contraddizione con la (1). $\square$

LEMMA 2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato, strettamente convesso e con frontiera di classe C^1.

Sia $u \in C^1(\overline{\Omega})$ tale che

$$u > 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

dove ν indica la normale esterna a $\partial\Omega$.

Sia infine $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che

(2) $$g' > 0 \quad e \quad \lim_{u \to 0^+} g'(u) = +\infty.$$

Se, per $v = -g(u)$, $\mathcal{C}_v$ non assume massimo positivo in $\Omega \times \Omega$, $\mathcal{C}_v$ non può diventare positiva quando (x_1, x_2) si avvicina a $\partial(\Omega \times \Omega)$.

OSSERVAZIONE. Se Ω soddisfa la proprietà della sfera interna e se $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ è tale che

$$\Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

allora $u > 0$ in Ω e $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ su $\partial\Omega$.

DIM. (i) Se $\lim_{u \to 0^+} \{-g(u)\} = +\infty$, allora v soddisfa l'ipotesi del LEMMA 1 e quindi la tesi segue da esso.

Infatti, preso $x \in \partial\Omega$, si ha

$$u(x - d\,\nu(x)) = u(x) - d\,\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + o(d) = -d\,\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + o(d)$$

per $d \to 0$. Dato che $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ su $\partial\Omega$, esistono due costanti $0 < c \leq C$ tali che

$$c \leq \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq C \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Posto $y = x - d\,\nu(x)$, si ha allora

$$\frac{1}{2}c \leq \frac{u(y)}{\operatorname{dist}(y, \partial\Omega)} \leq 2C$$

se y è abbastanza vicino a $\partial\Omega$. Perciò $v(y) \to +\infty$ se $\operatorname{dist}(y, \partial\Omega) \to 0$.

(ii) Se $\lim_{u \to 0^+} g(u) = a$ con $a \in \mathbb{R}$, allora $v \in C^0(\overline{\Omega})$ e quindi $C_v \in C^0(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$. Dato che C_v è continua sul compatto $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, esiste $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ in cui C_v assume il suo massimo. Per ipotesi, C_v non può avere un massimo positivo in $(x_1, x_2) \in \Omega \times \Omega$; perciò supponiamo che C_v abbia un massimo positivo in $(x_1, x_2) \in \partial(\Omega \times \Omega)$.

Se $x_1, x_2 \in \partial\Omega$, allora $\frac{x_1 + x_2}{2} \in \Omega$ ed inoltre

$$v(x_3) - v(x_1) = g(0) - g(u(x_3)) = -g'(\theta u(x_3))\, u(x_3) < 0,$$

per la (2) e dato che $u(x_3) > 0$. Dunque $C_v(x_1, x_2) < 0$, una contraddizione.

Rimangono perciò da valutare i due casi $x_1 \in \partial\Omega$ ed $x_2 \in \Omega$, $x_1 \in \Omega$ ed $x_2 \in \partial\Omega$: senza perdere di generalità, possiamo supporre $x_1 \in \Omega$ ed $x_2 \in \partial\Omega$.

Sia $\nu=\nu(x_2)$ la normale a $\partial\Omega$ in x_2; poichè C_v è massima in (x_1,x_2), la funzione

$$f(\varepsilon)= C_v(x_1,x_2)-C_v(x_1,x_2-\varepsilon\nu)\,, \quad \varepsilon\geq 0$$

è non negativa per valori piccoli di ε. Dato che

$$0\leq f(\varepsilon)=f(\varepsilon)-f(0)=f'(\vartheta\varepsilon)$$

per qualche $\vartheta\in(0,1)$, allora

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} f(\varepsilon)\geq 0$$

e quindi

$$0\leq \liminf_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\frac{\partial v}{\partial\nu}\left(x_3-\frac{\varepsilon}{2}\nu\right)-\frac{\partial v}{\partial\nu}(x_2-\varepsilon\nu)\right\}=$$

$$=\liminf_{\varepsilon\to 0^+}\left\{g'(u(x_2-\varepsilon\nu))\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_2-\varepsilon\nu)-g'\left(u\left(x_3-\frac{\varepsilon}{2}\nu\right)\right)\frac{\partial u}{\partial\nu}\left(x_3-\frac{\varepsilon}{2}\nu\right)\right\}=$$

$$=\liminf_{\varepsilon\to 0^+} g'(u(x_2-\varepsilon\nu))\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_2-\varepsilon\nu)-g'(x_3)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_3)=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_2)\liminf_{\varepsilon\to 0^+} g'(u(x_2-\varepsilon\nu))=-\infty,$$

che è assurdo. □

ESEMPIO 1. Soluzioni del problema

$$\Delta u=f(u)\quad \text{in } \Omega,$$

$$u(x)\to+\infty \quad \text{uniformemente se } \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\to 0,$$

se esistono, si dicono <u>large solutions</u>. Un problema di questo tipo si incontra, per esempio, in geometria differenziale quando $f(u)=\alpha e^{\beta u}$, $\alpha,\beta>0$, nel qual caso l'equazione di dice <u>equazione di Liouville</u>.

Il TEOREMA 1 ed il LEMMA 1 implicano che ogni large solution dell'equazione di Liouville in un dominio strettamente convesso sono convesse. La stessa conclusione può essere raggiunta se $f'(u)>0$ e $\frac{1}{f(u)}$ è convessa.

ESEMPIO 2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio strettamente convesso e sia u la soluzione del problema di torsione di Saint Venant:

$$\Delta u = -1 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

La funzione u è anche detta la funzione di distorsione.

Posto $v = -\sqrt{u}$, si ha che

$$\Delta v = -\frac{1}{v}\left(|\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\right), \quad v < 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$v = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

Il TEOREMA 1 ed il LEMMA 2 implicano allora che v è convessa; infatti, posto $g(u) = \sqrt{u}$, si ha $g' > 0$ e $\lim_{u \to 0^+} g'(u) = +\infty$, mentre, posto $b(v,p) = -\frac{1}{v}\left(|p|^2 + \frac{1}{2}\right)$, si ottiene $b_v(v,p) > 0$ e $\frac{1}{b(v,p)}$ è convessa.

ESEMPIO 3. La prima autofunzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace è positiva e soddisfa il problema

$$\Delta u + \lambda_1 u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

dove $\lambda_1 > 0$. Sia Ω è strettamente convesso; posto $v = -\log u$, v soddisfa le ipotesi del LEMMA 1 ed inoltre

$$\Delta v = \lambda_1 + |\nabla v|^2 \quad \text{in } \Omega.$$

Per la seconda osservazione al TEOREMA 1, possiamo concludere che v è convessa. Questo risultato si può estendere alle soluzioni positive del problema

$$\Delta u + V(x)\, u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

dove il potenziale $V(x)$ è non negativo e concavo.

ESEMPIO 4. Sia $u = u(x,t)$ soluzione del problema

$$u_t = \Delta u \quad \text{in } \Omega \times (0, +\infty),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega,$$
$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \ t > 0.$$

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è strettamente convesso, allora $v = -\log u$ è convessa (in x) per ogni $t > 0$ fissato se anche $-\log \varphi$ è convesso. Infatti si ha

$$v_t = \Delta v - |\nabla v|^2 \quad \text{in } \Omega,$$

che soddisfa le ipotesi dell'osservazione al TEOREMA 2. Perciò, se C_v assume un massimo positivo in (t_0, x_1, x_2), allora o $t_0 = 0$, il che è impossibile dato che $-\log \varphi$ è convessa, oppure $(x_1, x_2) \in \partial(\Omega \times \Omega)$, che è impossibile per il LEMMA 1.

OSSERVAZIONE. La prima autofunzione di Dirichlet oppure la soluzione dell'esempio precedente <u>non sono concave</u>.

Per esempio, se u è la prima autofunzione, si dimostra che

$$\langle \nabla^2 u(x)\,\omega, \omega \rangle < 0 \quad \text{e} \quad \langle \nabla^2 u(x)\,\nu(x), \nu(x) \rangle > 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

per ogni $\omega \in T_x(\partial\Omega)$.

Infatti, sia $s \longmapsto \gamma(s) \in \partial\Omega$ una curva in $\partial\Omega$ con $\gamma(0) = x \in \partial\Omega$ e $\gamma'(0) = \omega \in T_x(\partial\Omega)$. Dato che $u(\gamma(s)) = 0$, derivando due volte e calcolando per $s = 0$, si ha:

$$\langle \nabla^2 u(x)\,\omega, \omega \rangle + \gamma''(0) \cdot \nabla u(x) = 0.$$

Dato che $\nabla u(x) = |\nabla u(x)|\,\nu(x)$ (ν = normale interna) e $\gamma''(0) = k(x)\,\nu(x)$, dove $k(x)$ è la curvatura di γ in x, allora

$$\langle \nabla^2 u(x)\,\omega, \omega \rangle = -k(x)\,|\nabla u(x)| < 0$$

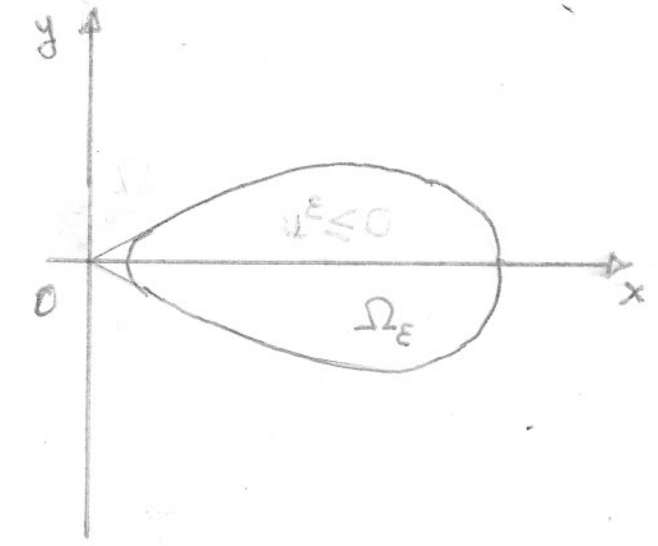
se $\partial\Omega$ è strettamente convesso.

D'altra parte, poiché $\Delta u = 0$ su $\partial\Omega$, si ha:

$$0 = \Delta u = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla(|\nabla u|) + |\nabla u| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} =$$
$$= \langle \nabla^2 u(x)\,\nu(x), \nu(x) \rangle - |\nabla u(x)|\,K_1(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

e $K_1(x) > 0$ se Ω è strettamente convesso.

Esempio 5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio convesso, simmetrico rispetto all'asse delle x, contenuto nel semipiano destro e con frontiera regolare tranne che in $(0,0)$ in cui ha un punto angoloso. Sia Ω_ε ottenuto da Ω arrotondando il punto angoloso con una circonferenza.



Sia $(\varepsilon, 0)$ il punto di $\partial\Omega_\varepsilon$ più a sinistra e sia K_ε la curvatura di $\partial\Omega_\varepsilon$ in $(\varepsilon,0)$. È chiaro che $K_\varepsilon \to +\infty$ se $\varepsilon \to 0^+$.

Sia ora $u^\varepsilon \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})$ una funzione nulla su $\partial\Omega_\varepsilon$ e non-positiva in Ω_ε.

Se parametrizziamo $\partial\Omega_\varepsilon$ nei dintorni di $(\varepsilon,0)$ come $x=\varphi(y)$ con $\varphi(0)=\varepsilon$ e $\varphi'(0)=0$, poiché $u^\varepsilon(\varphi(y),y)=0$ per ogni y, avremo che

$$u^\varepsilon_{xx}(\varphi(y),y)\,\varphi'(y)^2 + u^\varepsilon_x(\varphi(y),y)\,\varphi''(y) + u^\varepsilon_{yy}(\varphi(y),y) = 0$$

e quindi per $y=0$:

$$(8) \qquad u^\varepsilon_{yy}(\varepsilon,0) = -\varphi''(0)\,u^\varepsilon_x(\varepsilon,0) = -K_\varepsilon\, u^\varepsilon_x(\varepsilon,0).$$

Supponiamo che u^ε abbia laplaciano positivo e limitato (e.g. $\Delta u^\varepsilon=1$). Se $\varepsilon\to 0^+$, la (8) implica che, a meno di sottosuccessioni, o $u^\varepsilon_{yy}(\varepsilon,0)\to+\infty$ o altrimenti $u^\varepsilon_x(\varepsilon,0)\to 0$, dato che $K_\varepsilon\to\infty$. Poiché Δu^ε è limitato, nel primo caso si avrebbe che $u^\varepsilon_{xx}(\varepsilon,0)\to-\infty$ e quindi $\det \nabla^2 u^\varepsilon(\varepsilon,0)\to-\infty$ se $\varepsilon\to0^+$, cioè u^ε non può essere convessa in $(\varepsilon,0)$ se ε è grande. Nell'altro caso, dato che $u^\varepsilon_y(\varepsilon,0)=0$, se u^ε fosse convessa si avrebbe

$$0 \ge u^\varepsilon(x,y) \ge u^\varepsilon(\varepsilon,0) + u^\varepsilon_x(\varepsilon,0)(x-\varepsilon) = u^\varepsilon_x(\varepsilon,0)(x-\varepsilon)$$

e quindi u^ε tenderebbe uniformemente a zero. Questo non può essere: sia $B_r(a,0)$ una palla contenuta in Ω e sia

$$v(x,y) = \alpha\left[(x-a)^2+y^2-r^2\right]$$

con $4\alpha \le \Delta u^\varepsilon$ in Ω_ε. Dato che $\Delta(u^\varepsilon - v)\ge 0$ in Ω_ε e $u^\varepsilon - v\le 0$ su $\partial\Omega_\varepsilon$, allora $u^\varepsilon\le v$ in Ω_ε e quindi $u^\varepsilon(a,0)\le-\alpha r^2$ cioè $u^\varepsilon(a,0)$ non tende a zero. $\square$