

Sia  $v$  armonica in un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ . Sappiamo già che  $v \in C^\infty(\Omega)$ ; dimostriamo ora che  $v$  è analitica in  $\Omega$ , cioè  $v$  è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di ogni punto fissato in  $\Omega$ ,

Fissiamo un punto in  $\Omega$ : possiamo sempre supporre che tale punto sia l'origine. Sia inoltre  $R > 0$  tale che  $\overline{B_R} = \overline{B_R(0)} \subset \Omega$ ; allora  $v \in C^\infty(\partial B_R)$  e possiamo scrivere la formula di Poisson

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_N R} \int_{\partial B_R} \frac{u(y)}{|x-y|^N} dS_y, \quad x \in B_R.$$

Si noti ora che, per  $y \in \partial B_R$  si ha che

$$\begin{aligned} |x-y|^{-N} &= (|x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2)^{-N/2} = (|x|^2 - 2x \cdot y + R^2)^{-N/2} = \\ &= R^{-N} \left( 1 + \frac{|x|^2 - 2x \cdot y}{R^2} \right)^{-N/2}. \end{aligned}$$

Perciò, se  $|x| \leq r$  ed  $r < R(\sqrt{2}-1)$ , si ha che  $|x|^2 - 2x \cdot y \leq |x|^2 + 2|x||y| \leq r^2 + 2rR < R^2$  e quindi

$$|x-y|^{-N} = R^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-N/2}{n} \left( \frac{|x|^2 - 2x \cdot y}{R^2} \right)^n$$

e la serie converge totalmente in  $\overline{B_r(0)}$ . Dunque, possiamo scrivere che

$$\frac{1}{\omega_N R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^N} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+2}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(y) x^\alpha,$$

dove  $P_{2n+2}(x, y)$  sono polinomi di grado  $2n+2$  in  $(x, y)$ .

Concludendo

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \hat{a}_\alpha x^\alpha \quad \text{dove} \quad \hat{a}_\alpha = \int_{\partial B_R} v(y) a_\alpha(y) dS_y.$$

(2)

APPLICAZIONE. Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio limitato e convesso e sia  $u$  l'unica soluzione di classe  $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  del problema

$$(1) \quad -\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Allora gli insiemi di livello  $\Omega_t = \{x \in \Omega : u(x) > t\}$  sono strettamente convessi per ogni  $0 < t < \max u$ ,

Inoltre, se  $t = \max_{\bar{\Omega}} u$ ,  $\Omega_t$  contiene un solo punto.

Infine,  $\partial\Omega_t$  è una superficie analitica per  $0 < t < \max_{\bar{\Omega}} u$ .

Dim. (i) Sia  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione crescente di domini strettamente convessi e con  $\partial\Omega_n \in C^1$  tali che  $|\Omega \setminus \Omega_n| \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Ciascuna funzione  $v_n = -\sqrt{u_n}$  è convessa in  $\Omega_n$ , se  $u_n$  è la soluzione di (1) relativa ad  $\Omega_n$ .

Per il principio di massimo

$$\max_{\bar{\Omega}_n} (u - u_n) = \max_{\partial\Omega_n} u \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty.$$

Quindi  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  per ogni  $x \in \Omega$  se  $n \rightarrow \infty$  e perciò anche  $v = -\sqrt{u}$  è convessa; ne segue che ogni  $\Omega_t$  è convesso.

(ii) Si osservi che  $u$  è analitica in  $\Omega$ , dato che

$$u(x) = -\frac{|x|^2}{2N} + v(x) \quad \text{con } \Delta v = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

(iii) Se  $\Omega_t$  non fosse strettamente convesso, allora la sua frontiera  $\partial\Omega_t$  conterrebbe un segmento  $\sigma$  e su questo segmento  $u$  sarebbe una funzione analitica di una variabile costante uguale a  $t > 0$  su  $\sigma$ . Allora  $u$  sarebbe uguale a  $t$  su tutta la retta che contiene  $\sigma$  e perciò  $t$  sarebbe nullo, dato che  $u = 0$  nel punto di  $\partial\Omega$  intersecato da quella retta. Questo è assurdo.

(iv) Se l'insieme  $\Omega_t$  con  $t = \max u$  contenesse due  $\textcircled{3}$  punti distinti, allora conterrebbe anche il segmento che li unisce e quindi si procede come in (iii).

(v) Se  $0 < t < \max u$ , allora  $\partial\Omega_t$  non contiene punti critici di  $u$  e quindi, per il teorema del Dini, è localmente il grafico di una funzione regolare quanto lo è  $u$ .

□