PRINCIPIO di MASSIMO per la CONCAVITÀ.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto convesso; una funzione $v: \Omega \to \mathbb{R}$ è convessa in Ω se risulta che

(1) $\quad v((1-\lambda)x_0+\lambda x_1) \leq (1-\lambda)v(x_0)+\lambda v(x_1)$ per ogni $x_0, x_1 \in \Omega$ e $\lambda \in [0,1]$.

Potremmo anche non supporre che Ω sia convesso: in questo caso però la richiesta sarà che (1) debba valere per ogni x_0 e $x_1 \in \Omega$ tali che $(1-\lambda)x_0+\lambda x_1 \in \Omega$ per ogni $\lambda \in [0,1]$.

È noto che la definizione si può rendere meno stringente se v è semicontinua inferiormente, richiedendo che

$$v\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) \leq \frac{v(x_0)+v(x_1)}{2} \quad \text{per ogni } x_0, x_1 \in \Omega.$$

Perciò, se definiamo la funzione concavità di v $C_v: \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$ come

$$C_v(x_1,x_2) = v\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{v(x_1)+v(x_2)}{2}, \quad (x_1,x_2)\in\Omega\times\Omega,$$

allora una funzione semicontinua inferiormente v è convessa se e solo se $C_v \leq 0$ in $\Omega\times\Omega$.

TEOR. 1. Sia $v \in C^2(\Omega)$ una soluzione dell'equazione

(2) $$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(Dv)\frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} - b(y,v,Dv) = 0, \quad y\in\Omega,$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un dominio convesso e limitato e

(i) $a_{ij}(p) = a_{ji}(p)$ per ogni $p \in \mathbb{R}^N$ e $i,j = 1,\dots,N$ e

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(p)\xi_i\xi_j > 0 \quad \text{per ogni } p\in\mathbb{R}^N \text{ e } \xi \neq 0;$$

(ii) $b: \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è non-negativa e (strettamente) crescente in v per ogni $(x,p)\in\Omega\times\mathbb{R}^N$ fissato;

(iii) la funzione $(x,v) \longmapsto b(x,v,p)^{-1}$ è convessa per ogni $p \in \mathbb{R}^N$ fissato.

Allora C_v non può assumere massimo positivo in $\Omega \times \Omega$.

Dim. Sia $C_v(x_1,x_2) > 0$ un massimo positivo per $(x_1,x_2) \in \Omega\times\Omega$, allora

$$v(x_3) > \frac{v(x_1)+v(x_2)}{2} \qquad \text{dove } x_3 = \frac{x_1+x_2}{2},$$

Quindi, la (ii) e la (iii) implicano che

$$(3) \qquad b(x_3, v(x_3), p)^{-1} < b\left(x_3, \frac{v(x_1)+v(x_2)}{2}, p\right)^{-1} \leq \frac{b(x_1,v(x_1),p)^{-1} + b(x_2,v(x_2),p)^{-1}}{2}$$

per ogni $p \in \mathbb{R}^N$ tale che $b(x_3, v(x_3), p) > 0$.

Consideriamo ora la funzione $\mathcal{E} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathcal{E}(z,\alpha,\beta) = C_v(x_1+\alpha z, x_2+\beta z), \quad z \in \mathbb{R}^N,$$

per $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ fissati. Fissato $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^N$ scegliamo $\delta = \delta_{\alpha,\beta} > 0$ tale che $(x_1+\alpha z, x_2+\beta z) \in \Omega\times\Omega$ per $|z|<\delta$. Allora $\mathcal{E}$ ha un massimo locale per $z=0$ e quindi

$$D_z\mathcal{E}(0,\alpha,\beta) = 0 \quad \text{e} \quad D_z^2\mathcal{E}(0,\alpha,\beta) \leq 0.$$

Calcolando otteniamo che

$$\frac{\alpha+\beta}{2} Dv(x_3) = \frac{\alpha}{2} Dv(x_1) + \frac{\beta}{2} Dv(x_2) \quad \text{e}$$

$$D_z^2\mathcal{E}(0,\alpha,\beta) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 D^2v(x_3) - \frac{\alpha^2}{2} D^2v(x_1) - \frac{\beta^2}{2} D^2v(x_2) \leq 0.$$

Scegliendo $(\alpha,\beta) = (1,0)$ e successivamente $(\alpha,\beta)=(0,1)$ nella prima equazione, scopriamo che

$$Dv(x_3) = Dv(x_1) = Dv(x_2),$$

che d'ora in poi indicheremo con p. Per la (i) inoltre abbiamo che

$$0 \geq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(p)\, \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z_i\, \partial z_j}(0,\alpha,\beta) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(p)\, \frac{\partial^2 v}{\partial y_i\, \partial y_j}(x_3) -$$

$$- \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(p)\, \frac{\partial^2 v}{\partial y_i\, \partial y_j}(x_1) - \frac{\beta^2}{2} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(p)\, \frac{\partial^2 v}{\partial y_i\, \partial y_j}(x_2).$$

Quindi, applicando la (2), concludiamo che

$$\text{(4)} \quad \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 b(x_3, v(x_3), p) \leq \frac{\alpha^2}{2}\, b(x_1, v(x_1), p) + \frac{\beta^2}{2}\, b(x_2, v(x_2), p)$$

per ogni $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Scegliendo $(\alpha,\beta) = (1,0)$ e $(\alpha,\beta) = (0,1)$, abbiamo:

$$b(x_1, v(x_1), p),\ b(x_2, v(x_2), p) \geq \frac{1}{2}\, b(x_3, v(x_3), p) > \frac{1}{2}\, b\left(x_3, \frac{v(x_1)+v(x_2)}{2}, p\right) \geq 0.$$

Scegliendo $\bar\alpha = b(x_2, v(x_2), p)$ e $\bar\beta = b(x_1, v(x_1), p)$, otteniamo che

$$\left(\frac{\bar\alpha+\bar\beta}{2}\right)^2 b(x_3, v(x_3), p) \leq \bar\alpha\bar\beta\, \frac{\bar\alpha+\bar\beta}{2}$$

e quindi, dato che $\alpha+\beta > 0$,

$$b(x_3, v(x_3), p) \leq \frac{2\bar\alpha\bar\beta}{\bar\alpha+\bar\beta},$$

da cui

$$b(x_3, v(x_3), p)^{-1} \geq \frac{1}{2}\left(\bar\alpha^{-1} + \bar\beta^{-1}\right) = \frac{b(x_1, v(x_1), p)^{-1} + b(x_2, v(x_2), p)^{-1}}{2},$$

che contraddice la (3). □

Oss. 1 (i) La scelta $(\alpha,\beta) = (\bar\alpha, \bar\beta)$ è ottimale, poiché è quella che rende la (4) ottimale.

(ii) L'ipotesi (ii) si può indebolire richiedendo che b sia solo crescente in v (N. Korevaar, Indiana Univ. Math. J. 32 (1983)).

Il principio di massimo per la concavità vale anche per certe equazioni paraboliche.

TEOR 2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio convesso e limitato e sia $v = v(x,t)$ una funzione, di classe $C^2(\Omega)$ in x e $C^1((0,T])$ in t, soluzione dell'equazione

$$(5) \quad v_t = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(t, Dv) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - b(t,x,v,Dv) \quad \text{in } \Omega \times (0,T],$$

dove, per ogni $t \in (0,T]$ fissato i coefficienti in (5) soddisfano le ipotesi (i) e (ii) del TEOR. 1 ed in più la funzione $(x,v) \longmapsto b(t,x,v,p)$ è concava per ogni (t,p) fissato.

Allora la funzione

$$C_v(t,x_1,x_2) = v\left(\frac{x_1+x_2}{2}, t\right) - \frac{v(x_1,t)+v(x_2,t)}{2}$$

assume massimo positivo in un punto (t_0,x_1,x_2) per cui o $t_0 = 0$ oppure almeno uno tra x_1 ed x_2 appartiene a $\partial\Omega$.

Dim. Sia $(t_0,x_1,x_2) \in (0,T] \times \Omega \times \Omega$ un punto di massimo per C_v. Procedendo esattamente come nella dimostrazione del TEOR. 1, si ottiene che

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(t_0,p) \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \omega_i \partial \omega_j}(0,\alpha,\beta) \leq 0,$$

dove questa volta $\mathcal{E}(\omega,\alpha,\beta) = C_v(t_0, x_1+\alpha\omega, x_2+\beta\omega)$ e

$$p = Dv(x_1,t_0) = Dv(x_2,t_0) = Dv(x_3,t_0).$$

Quindi la (5) implica che

$$v_t(x_3,t_0) - \frac{v_t(x_1,t_0)+v_t(x_2,t_0)}{2} + b(x_3,v(x_3,t_0)) - \frac{b(x_1,v(x_1,t_0))+b(x_2,v(x_2,t_0))}{2} \leq 0,$$

dove per brevità si è posto $b(x,v) = b(t_0,x,v,p)$.

Poiché $t_0 \in (0,T]$,

$$v_t(x_3,t_0) - \frac{v_t(x_1,t_0)+v_t(x_2,t_0)}{2} = \frac{\partial C_v}{\partial t}(t_0,x_1,x_2) \geq 0,$$

essendo (t_0,x_1,x_2) un punto di massimo, e quindi

$$b(x_3, v(x_3,t_0)) \leq \frac{b(x_1,v(x_1,t_0))+b(x_2,v(x_2,t_0))}{2}.$$

L'ipotesi di concavità su b implica allora che

$$b(x_3, v(x_3,t_0)) \leq b\left(x_3, \frac{v(x_1,t_0)+v(x_2,t_0)}{2}\right),$$

che, per la stretta monotonia di b in v, implica che $C_v(t_0,x_1,x_2) \leq 0$ (essendo strettamente crescente, b è invertibile rispetto a v. $\square$

Oss. 2. L'ipotesi (ii) in questo caso si può rimuovere agevolmente. Infatti, posto $v^\varepsilon(x,t) = e^{-\varepsilon t} v(x,t)$ si osserva che

$$v^\varepsilon_t = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, e^{\varepsilon t} Dv^\varepsilon) \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} - e^{\varepsilon t} b(t,x,e^{\varepsilon t} v^\varepsilon, e^{\varepsilon t} Dv^\varepsilon) + \varepsilon v^\varepsilon,$$

che è un'equazione nella forma considerata nel TEOR. 2.

Dato che

$$|v^\varepsilon(x,t) - v(x,t)| \leq |1-e^{-\varepsilon T}| \max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} |v|, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}\times[0,T],$$

allora $v^\varepsilon \to v$ uniformemente in $\overline{\Omega}\times[0,T]$ per $\varepsilon \to 0^+$.

Dato che ogni eventuale massimo positivo di ogni C_{v^ε} viene assunto in un punto $(t^\varepsilon, x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon)$ tale che o $t^\varepsilon = 0$ oppure $(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \in \partial(\Omega\times\Omega)$, la stessa cosa si verifica per ogni eventuale massimo positivo di C_v.