STELLARITÀ

Un dominio D si dice <u>stellato</u> rispetto ad un punto O se, per ogni $x \in \overline{D}$, il segmento che unisce O ad x è tutto contenuto in $\overline{D}$.

LEMMA. Sia D stellato (rispetto all'origine) e sia ∂D di classe C^1. Allora $x \cdot \nu(x) \geq 0$ per ogni $x \in \partial D$, dove ν è il versore della normale esterna a D.

Dim. Dato che ∂D è di classe C^1, fissato $x \in \partial D$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\nu(x) \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \leq \varepsilon$ per ogni $y \in \overline{D}$ con $|y-x| < \delta$.

In particolare

$$\limsup_{\overline{D} \ni y \to x} \nu(x) \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \leq 0.$$

Sia $y = \lambda x$ con $0 < \lambda < 1$; allora $y \in \overline{D}$ poiché D è stellato e quindi

$$\nu(x) \cdot \frac{x}{|x|} = -\frac{\lambda - 1}{|\lambda - 1|} \nu(x) \cdot \frac{x}{|x|} = -\nu(x) \cdot \frac{\lambda x - x}{|\lambda x - x|} =$$

$$= -\nu(x) \frac{y-x}{|y-x|} \geq -\limsup_{\overline{D} \ni y \to x} \nu(x) \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \geq 0. \quad \square$$

TEOREMA. Siano D_0 e D_1 due domini di $\mathbb{R}^N$ stellati allo stesso punto $O \in D_1$, ambedue con frontiera di classe C^1 e sia $\Omega = D_0 \setminus \overline{D_1}$. Sia u la soluzione del problema

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{su } \partial D_0,$$
$$u = 1 \quad \text{su } \partial D_1.$$

Allora

(i) $\nabla u \neq 0$ in Ω;

(ii) per ogni $t \in (0,1)$, l'insieme $\Gamma_t = \{x \in \Omega \,;\, u(x) = t\}$ è una superficie regolare (analitica) ed inoltre Γ_t è la frontiera di un dominio stellato rispetto ad O.

DIM. (i) Sia $v(x) = x \cdot \nabla u(x)$ per $x \in \overline{\Omega}$. Allora

$$\Delta v(x) = 2\Delta u(x) + x \cdot \nabla(\Delta u(x)) = 0 \quad , x \in \Omega .$$

Dato che ∂D_0 è una superficie di livello di u e $u > 0$ in Ω, risulta:

$$\nabla u(x) = -|\nabla u(x)|\, \nu(x) \quad \text{per } x \in \partial D_0 .$$

Perciò $v \leq 0$ su ∂D_0 per il lemma. In modo analogo, si dimostra che $v \leq 0$ su ∂D_1.

Per il principio di massimo forte, $-v > 0$ in Ω e quindi $\nabla u \neq 0$ in Ω.

(ii) Per il teorema del Dini e (i), ogni Γ_t è una superficie regolare ed, anzi, Γ_t è analitica, dato che u lo è.

Estendiamo ora u uguale ad 1 su D_1 e poniamo

$$D_t = \{ x \in D_0 : u(x) > t \} .$$

Allora D_t è aperto e $\partial D_t = \Gamma_t$; inoltre D_t è connesso, perchè, per il principio di massimo, ogni sua componente deve necessariamente contenere D_1.

Osservando che $\nabla u(x)$ è proporzionale a $\nu(x)$ e che $v(x) < 0$ per ogni $x \in \Gamma_t$, otteniamo che $x \cdot \nu(x) > 0$ per ogni $x \in \Gamma_t$.

Se D_t non fosse stellato rispetto ad 0, esisterebbe $x \in \Gamma_t$ tale che $\lambda x \notin \overline{D_t}$ per $\lambda < 1$, λ vicino ad 1; ma allora

$$\nu(x) \cdot \frac{x}{|x|} = -\lim_{\lambda \to 1^-} \nu(x) \cdot \frac{\lambda x - x}{|\lambda x - x|} \leq 0 ,$$

il che è assurdo. $\square$

OSSERVAZIONE. Questo teorema si può estendere a situazioni ben più generali. Si può infatti sostituire all'equazione di Laplace un'equazione del secondo ordine molto più generale:

(1) $$F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad \text{in } \Omega ,$$

dove la $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S^N \to \mathbb{R}$ è funzione degli argomenti $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^N$ ed $A \in S^N$, dove si è indicato con S^N l'insieme delle matrici $N \times N$ simmetriche.

Per poter applicare il principio di massimo alla funzione $v(x) = x \cdot \nabla u(x)$, è sufficiente fare le seguenti ipotesi sulla funzione F.

(i) L'equazione (1) deve essere uniformemente ellittica, cioè

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial a_{ij}}(x,u,\nabla u,\nabla^2 u)\,\xi_i \xi_j \geq b\,|\xi|^2$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$ ed $x \in \Omega$;

(ii) $F_u(x,u,\nabla u,\nabla^2 u) \leq 0$ in Ω;

(iii)
$$2\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial a_{ij}}(x,u,\nabla u,\nabla^2 u)\,u_{ij} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial p_i}(x,u,\nabla u,\nabla^2 u)\,u_i - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,u,\nabla u,\nabla^2 u)\,x_i \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

ESEMPIO. Sia q un parametro positivo. L'equazione

$$\Delta u + (q-2)\frac{\langle \nabla^2 u\, \nabla u, \nabla u\rangle}{|\nabla u|^2} = f(|x|, u, |\nabla u|)$$

soddisfa sicuramente la (i); la (ii) è soddisfatta se $q>1$; la (ii) è soddisfatta se $f_u(|x|,u,|\nabla u|) \geq 0$ in Ω; la (iv) si verifica se $2f(|x|,u,|\nabla u|) + f_s(|x|,u,|\nabla u|)\,|\nabla u| + f_r(|x|,u,|\nabla u|)\,|x| \geq 0$ in Ω, dove f_s ed f_r indicano le derivazioni rispetto ad $r=|x|$ ed $s=|p|$.

Concludiamo questa dispensa con un'applicazione dell'identità di Pohozaev ad un problema al contorno non lineare in domini stellati.

TEOREMA. Sia $D \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato, stellato rispetto ad 0 e con frontiera ∂D di classe C^1.

Sia $u \in C^2(\bar{D})$ una soluzione del problema

$$-\Delta u = |u|^{p-1} u \quad \text{in } D,$$
$$u = 0 \quad \text{su } \partial D.$$

Se $p > \frac{N+2}{N-2}$, $N \geq 3$, $u \equiv 0$ in D.

DIM. Dato che $u = 0$ su ∂D, l'identità di Pohozaev (vedi dispensa "Identità integrali", formula (7)) ci assicura che

$$\frac{N-2}{2} \int_D |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial D} |\nabla u|^2 (x \cdot \nu) \, dS_x = N \int_D F(u) \, dx,$$

dove $F(u) = \int_0^u |t|^{p-1} t \, dt = \frac{|u|^{p+1}}{p+1}$.

Poiché D è stellato, $x \cdot \nu(x) \geq 0$ per $x \in \partial D$ e quindi

$$(N-2) \int_D |\nabla u|^2 dx \leq \frac{2N}{p+1} \int_D |u|^{p+1} dx.$$

D'altra parte la prima identità di Green implica che

$$\int_D |\nabla u|^2 dx = - \int_D u \, \Delta u \, dx = \int_D |u|^{p+1} dx,$$

e quindi

$$\left(N-2 - \frac{2N}{p+1} \right) \int_D |u|^{p+1} dx \leq 0.$$

Se $p > \frac{N+2}{N-2}$, ciò implica che $\int_D |u|^{p+1} dx = 0$ e cioè $u \equiv 0$ in D. $\square$