1. CURVATURA CON SEGNO DI UNA CURVA PIANA.

Sia $[0,L] \ni s \longmapsto (x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla sua lunghezza d'arco. Possiamo scrivere $z(s) = x(s) + i\, y(s)$, sfruttando le possibilità offerte dalla variabile complessa. Il versore tangente $t(s)$ alla curva sarà dunque $z'(s)$; si noti che

$$1 = |z'(s)|^2 = z'(s)\,\overline{z'(s)} .$$

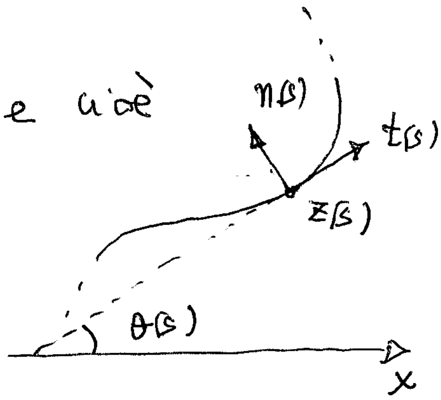
Il versore normale $n(s)$, a sinistra della curva rispetto al verso di percorrenza su di essa, sarà dunque dato da

$$n(s) = i\, z'(s);$$

la moltiplicazione per $i = e^{i\pi/2}$ equivale infatti ad una rotazione anti-oraria di $\pi/2$.

La <u>curvatura</u> $k(s)$ nel punto $z(s)$ è data da

$$\frac{dt}{ds}(s) = k(s)\, n(s)$$



per la <u>formula</u> <u>di</u> <u>Frenet-Serret</u> e cioè

$$z''(s) = k(s)\, i\, z'(s)$$

da cui

$$k(s) = -i\, z''(s)\,\overline{z'(s)} .$$

Se indichiamo con $\theta(s)$ l'angolo formato da $t(s)$ con il semi-asse reale positivo, allora, dato che

$$z'(s) = e^{i\theta(s)},$$

otteniamo:

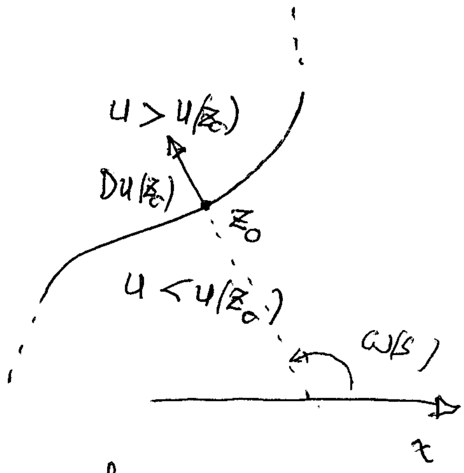
$$k(s) = -i \left\{ i\, e^{i\theta(s)}\, \theta'(s) \right\} e^{-i\theta(s)} = \theta'(s)$$

Esempio. Circonferenza di raggio R. Si ha $z(s) = R e^{is/R}$ e quindi $\theta(s) = \frac{s}{R} + \frac{\pi}{2}$ e dunque $k(s) = \frac{1}{R}$.

2. Curvatura di una linea di livello.

Supponiamo che la nostra curva sia la linea di livello $u = u(z_0)$ di una funzione u di classe C^2 e tale che $Du(z_0) \neq 0$; supponiamo anche che sia $u > u(z_0)$ a sinistra della curva e $u < u(z_0)$ a destra.

Avremo che



(1) $$n(s) = \frac{\overline{f(z(s))}}{|f(z(s))|}$$

avendo posto $f = u_x - i u_y$ e scelto $z(0) = z_0$. Se $\omega(s)$ è l'angolo formato da $Du(z(s))$ con il semi-asse reale positivo, abbiamo che

(2) $$n(s) = e^{i\omega(s)} = e^{i\left[\theta(s) + \frac{\pi}{2}\right]} = i z'(s)$$

e quindi

$$h(s) = \omega'(s) = \omega_z(z(s))\, z'(s) + \omega_{\bar z}(z(s))\, \overline{z'(s)} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left\{ \omega_z(z(s))\, z'(s) \right\} = -2\,\mathrm{Re}\left\{ i e^{i\omega(s)} \omega_z(z(s)) \right\} =$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\left\{ \partial_z e^{i\omega(z(s))} \right\}.$$

Se indichiamo con $k(s)$ la curvatura della linea di massima pendenza di u passante per z_0, si ottiene invece che

$$k(0) = -2\,\mathrm{Im}\left\{ \partial_z e^{i\omega(z_0)} \right\},$$

e quindi, se $\phi = h + ik$, abbiamo che

(3) $$\phi = -2\, \partial_z e^{i\omega}.$$

3. CURVATURA DELLE LINEE DI LIVELLO DI UNA FUNZIONE ARMONICA.

Se u è armonica, sappiamo che $f = u_x - i u_y$ è olomorfa e quindi (1)–(3) implicano che

$$\phi(z) = -2\,\partial_{\bar{z}}\left[\frac{\overline{f(z)}}{|f(z)|}\right] = \frac{\overline{f(z)^2}\, f'(z)}{|f(z)|^3}$$

e dunque

$$\frac{\phi(z)}{|Du(z)|} = \frac{\overline{f(z)^2}\, f'(z)}{|f(z)|^4} = \frac{\overline{f(z)^2}\, f'(z)}{\overline{f(z)^2}\; f(z)^2} = \frac{f'(z)}{f(z)^2}.$$

Perciò la funzione $\Phi = \phi/|Du|$ è olomorfa se Du non si annulla, il che vuol dire che la funzione $H = h/|Du|$ è armonica.

TEOR. Sia Ω un dominio piano limitato e duplicemente connesso con $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, dove Γ_0 e Γ_1 sono due curve semplici chiuse di classe C^2.
Sia $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ la soluzione del problema

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \Gamma_0 \text{ e } u = 1 \text{ su } \Gamma_1.$$

Allora

(i) u non ha punti critici in $\overline{\Omega}$;

(ii) $\max_{\overline{\Omega}} H = \max_{\partial\Omega} H$ e $\min_{\overline{\Omega}} H = \min_{\partial\Omega} H$;

(iii) Se Γ_0 e Γ_1 sono convesse, allora $h > 0$ in Ω ed ogni insieme di livello $\{z \in \Omega : u(z) > t\}$ è (uniformemente) convesso per ogni $0 < t < 1$.

DIM. (i) Abbiamo

$$\sum_{z_k \in \Omega} m(z_k) + \frac{1}{2} \sum_{z_k \in \partial\Omega} m(z_k) = 2 - 2 = 0.$$

(ii) Segue dal principio di massimo debole.

(iii) Poiché $h \geq 0$ su Γ_0 e Γ_1, per il principio di massimo forte, $H > 0$ in Ω e quindi $h > 0$ in Ω. Poiché ogni linea di livello $\{z \in \Omega : u(z) = t\}$ è compatta, allora esiste $m_t > 0$ tale che $h \geq m_t$ su tale linea.

Quindi tale linea è la frontiera di dominio uniformemente convesso.