COMPORTAMENTO ASINTOTICO PER TEMPI LUNGHI DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DEL CALORE

Consideriamo il problema al contorno

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
u_t &= \Delta u && \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\
u &= 0 && \text{su } \partial\Omega \times (0,\infty), \\
u &= f && \text{su } \Omega \times \{0\},
\end{aligned}
$$

dove Ω è un dominio limitato in $\mathbb{R}^N$ ed f è una funzione data.

Per risolvere (1) possiamo tentare lo schema del metodo della separazione delle variabili e cercare soluzioni del tipo

$$u(x,t) = U(x)\,T(t).$$

Otteniamo subito che

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{T'}{T} = \text{costante} = -\lambda,$$

e quindi dovremo risolvere il problema

$$(2) \qquad \Delta U + \lambda U = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad U = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

e l'equazione

$$T' + \lambda T = 0, \qquad t > 0.$$

Se $G(x,y)$ è la funzione di Green per l'operatore di Laplace, il problema (2) si può convertire nell'equazione integrale

$$(3) \qquad U(x) = \lambda \int_\Omega G(x,y)\, U(y)\, dy, \qquad x \in \Omega.$$

Sia $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ l'operatore lineare tale che

$$(K\varphi)(x) = \int_\Omega G(x,y)\, \varphi(y)\, dy, \quad x \in \Omega,$$

per $\varphi \in L^2(\Omega)$.

Allora l'equazione (3) è equivalente a

$$(4) \qquad K U = \lambda^{-1} U .$$

Si verifica che l'operatore K è <u>compatto</u>, cioè l'immagine tramite K di ogni sottoinsieme limitato di $L^2(\Omega)$ è (relativamente) compatta. La teoria di Fredholm sugli operatori compatti garantisce che esiste un sistema ortonormale completo $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $L^2(\Omega)$ fatto di soluzioni di (4), ciascuna corrispondente ad un <u>autovalore</u> $\lambda_n^{-1} \in (0, \|K\|]$, dove

$$\|K\| = \sup\{\|K\varphi\|_2 : \|\varphi\|_2 \le 1\},$$

ed inoltre $\lambda_1 = \|K\|^{-1}$ e $\lambda_n^{-1} \to 0$ se $n \to +\infty$. I valori λ_n si possono ordinare in successione crescente: $0<\lambda_1<\lambda_2\le\lambda_3\le \dots$
È chiaro che ogni U_n soddisfa la (2), oltre che la (4).

Si definisca allora

$$\hat{u}(n,t) = (u(\cdot,t), U_n)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x,t)\, U_n(x)\, dx, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Da (1) e dall'identità di Green, otteniamo:

$$\hat{u}_t(n,t) = \int_\Omega u_t(x,t)\, U_n(x)\, dx = \int_\Omega \Delta u(x,t)\, U_n(x)\, dx =$$

$$= \int_\Omega u(x,t)\, \Delta U_n(x)\, dx = -\lambda_n \hat{u}(n,t).$$

Perciò

$$\hat{u}(n,t) = c_n e^{-\lambda_n t}, \quad n\in\mathbb{N},$$

Poiché $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è completo, si ha:

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{u}(n,t)\, U_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n U_n(x) e^{-\lambda_n t}.$$

Quindi, la condizione iniziale in (1) implica che

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n U_n(x), \quad x \in \Omega,$$

e dunque

$$c_n = \hat{f}(n) = \int_\Omega f(x) U_n(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

da cui la formula spettrale:

$$(5) \quad u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{f}(n) U_n(x) e^{-\lambda_n t}, \quad x \in \overline{\Omega},\ t>0.$$

La (5) implica, per esempio, che se $m = \inf\{n \in \mathbb{N} : \hat{f}(n) \neq 0\}$, allora

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_m t} u(x,t) = \sum_{\lambda_n = \lambda_m} \hat{f}(n) U_n(x).$$

In particolare, se $\hat{f}(1) \neq 0$ si ha:

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_1 t} u(x,t) = \hat{f}(1) U_1(x).$$