1. EQUAZIONE DEL CALORE: COMPORTAMENTO PER TEMPI PICCOLI.

Il nucleo di Gauss

$$(1) \qquad H_t(x) = (4\pi t)^{-N/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0,$$

soddisfa l'equazione del calore per $x \neq 0$ e $t > 0$ ed è anche detto la soluzione fondamentale dell'equazione del calore

$$u_t = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty).$$

Si ha inoltre che $H_t > 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} H_t(x)\, dx = 1 \quad \text{per ogni } t > 0.$$

Si noti anche che si può scrivere che

$$H_t(x) = t^{-N/2} H_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

e quindi risulta che H_t è un mollificatore.

Perciò la convoluzione

$$u(x,t) = H_t * f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0,$$

è tale che

$$(2) \qquad \| u(x,t) - f \|_p \to 0 \quad \text{per } t \to 0^+,$$

quando $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ se $1 \leq p < \infty$ e quando $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ se $p = \infty$.

Sappiamo inoltre che $\Delta u = (\Delta H_t) * f = (\partial_t H_t) * f = \partial_t u$ e dunque u è soluzione del problema di Cauchy

$$u_t = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \qquad u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times \{0\},$$

nel senso specificato dalla (2).

Si noti ora che

$$-4t \log H_t(x) = 2Nt \log(4\pi t) + |x|^2 \to |x|^2 = \mathrm{dist}(x,0)^2$$

se $t \to 0^+$.

Questa proprietà si può generalizzare con le dovute interpretazioni. Si osservi intanto che, se $f \geq 0$,

$$u(x,t)^{4t} = (4\pi t)^{-2Nt} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \right)^{4t} =$$

$$= (4\pi t)^{-2Nt} \| g_x \|_{L^q(\mathbb{R}^N, \mu)},$$

dove $q = \frac{1}{4t}$, $g_x(y) = e^{-|x-y|^2}$ e $d\mu_y = f(y)\, dy$.

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora, dalla teoria degli spazi di Lebesgue avremo che

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t)^{4t} = \lim_{q \to \infty} \| g_x \|_{L^q(\mathbb{R}^N, \mu)} = \| g_x \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mu)} =$$

$$= \inf \{ s : \mu(\{ y : e^{-|x-y|^2} > s \}) = 0 \} = \sup_{y \in \mathrm{supp}(f)} e^{-|x-y|^2} =$$

$$= \exp \{ - \inf_{y \in \mathrm{supp}(f)} |x-y|^2 \}.$$

In definitiva

$$(3) \quad -4t \log u(x,t) \to \mathrm{dist}(x, \mathrm{supp} f)^2 \quad \text{se } t \to 0^+.$$

Qualitativamente la (3) ci dice che, per tempi molto piccoli, le superfici di livello di u assomigliano a quelle di $\mathrm{dist}(x, \mathrm{supp} f)$.

Questo tipo di comportamento può essere dimostrato anche per la soluzione del seguente problema di Cauchy–Dirichlet:

$$u_t = \Delta u \text{ in } \Omega \times (0,\infty), \quad u=0 \text{ su } \Omega \times \{0\}, \quad u=1 \text{ su } \partial\Omega \times (0,\infty).$$

Risulta infatti la formula di Varadhan:

$$(4) \quad \lim_{t\to 0^+} \{-4t \log u(x,t)\} = \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)^2, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Una giustificazione della (4) è la seguente. Sia $v(x,t) = -4t \log u(x,t)$; dopo vari calcoli scopriamo:

$$4t\,(v_t - \Delta v) = 4v - |Dv|^2 \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty),$$
$$v = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega \times (0,\infty).$$

Ci aspettiamo allora che, per $t \to 0^+$, $v(x,t)$ tenda alla soluzione v_0 del problema

$$4v - |Dv|^2 = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Questa si può scrivere come $v_0 = w^2$ dove

$$|Dw|^2 = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad w = 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Si può dimostrare questo problema caratterizza la funzione $w(x) = \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$.

2. SIMMETRIA DI SUPERFICI ISOTERMICHE STAZIONARIE.

Si dice che una superficie $\Gamma \subset \Omega$ di codimensione 1 è una superficie isotermica invariante o stazionaria per u se esiste $c: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tale che

$$u(x,t) = c(t) \quad \text{per ogni } x \in \Gamma \text{ e } t > 0.$$

Se $x_1, x_2 \in \Gamma$, allora $u(x_1,t) = u(x_2,t)$ per ogni $t>0$

e quindi

$$-4t \log u(x_1,t) = -4t \log u(x_2,t)\ , \quad t>0 .$$

La (4) allora implica che

$$\mathrm{dist}(x_1, \partial\Omega) = \mathrm{dist}(x_2, \partial\Omega) \ ;$$

per l'arbitrarietà di x_1 ed x_2, concludiamo che Γ è una <u>superficie parallela</u> a $\partial\Omega$

Si consideri la funzione $w(x,t) = 1 - u(x,t)$ e si ponga

$$v(x) = \int_0^{+\infty} w(x,t)\, dt \ , \quad x \in \overline{\Omega} .$$

Si ha che

$$w_t = \Delta w \ \text{ in } \Omega \times (0,\infty), \quad w=1 \ \text{ su } \Omega \times \{0\}\ , \quad w=0 \ \text{ su } \partial\Omega \times (\infty),$$

e quindi $v=0$ su $\partial\Omega$. Inoltre v è costante su Γ se questa è isotermica stazionaria ed infine

$$\Delta v(x) = \int_0^{\infty} \Delta w(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} w_t(x,t)\, dx = w(x,t)\Big|_0^{+\infty} = -1 .$$

In conclusione, risulta che

(5) $\quad \Delta v = -1 \ \text{ in } \Omega\ , \quad v=0 \ \text{ su } \partial\Omega, \quad v = c \ \text{ su } \Gamma,$

per qualche costante $c>0$ e Γ è parallela a $\partial\Omega$.

Abbiamo dimostrato che, se esiste $\overline{D} \subset \Omega$ con $\partial D = \Gamma$ con ∂D di classe C^1, allora l'esistenza di una soluzione di (5) implica che D ed Ω devono essere palle concentriche.

In conclusione, nelle ipotesi enunciate per D ed Ω (limitato), se $\Gamma = \partial D$ è una superficie isotermica stazionaria, Γ e $\partial\Omega$ devono essere sfere concentriche.

3. ANCORA SULLE SUPERFICI ISOTERMICHE STAZIONARIE.

Sia $s^{-1}V(x,s) = \int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-st}\,dt$, $s>0$, la <u>trasformata</u> <u>di Laplace</u> della funzione $u(x,t)$. Si ha che

$$\Delta V(x,t) = \int_0^{+\infty} s\,\Delta u(x,t)e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} s\,u_t(x,t)\,e^{-st}\,dt =$$

$$= s\,u(x,t)\,e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} s\,u(x,t)e^{-st}\,dt = s\,V(x,s),$$

dato che $u(x,0)=0$; inoltre per $x\in\partial\Omega$ risulta:

$$V(x,s) = \int_0^{+\infty} s\,e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\cdot s = 1.$$

Perciò

$$\Delta V = sV \quad \text{in } \Omega, \qquad V=1 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

per ogni $s>0$.

Poniamo ora $V^\varepsilon(x) = V(x,\varepsilon^{-2})$ e $V^\varepsilon(x) = e^{-\frac{w^\varepsilon(x)}{\varepsilon}}$; otteniamo che

$$V^\varepsilon = \varepsilon^2\Delta V^\varepsilon = \varepsilon^2 V^\varepsilon\left\{\frac{|Dw^\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} - \frac{\Delta w^\varepsilon}{\varepsilon}\right\} =$$
$$= V^\varepsilon\left\{|Dw^\varepsilon|^2 - \varepsilon\,\Delta w^\varepsilon\right\}$$

e quindi

$$(6) \qquad \varepsilon\,\Delta w^\varepsilon = |Dw^\varepsilon|^2 - 1 \quad \text{in } \Omega, \qquad w^\varepsilon = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

per ogni $\varepsilon\to0^+$. Si noti che $w^\varepsilon>0$ in Ω per il principio di massimo (minimo).

Sia $m=\min\{x_1 : x\in\overline{\Omega}\}$ e sia $\phi_\varepsilon(x) = e^{-\frac{x_1-m}{\varepsilon}}$; è facile verificare che

$$\varepsilon^2\Delta\phi_\varepsilon = \phi_\varepsilon \quad \text{in } \Omega \quad \text{e} \quad \phi_\varepsilon \le 1 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Per il principio di massimo allora $V^\varepsilon \le \phi_\varepsilon$ su $\overline{\Omega}$

e quindi

$$(\ast) \qquad 0 \leq w^\varepsilon(x) \leq x_1 - m \leq M - m \quad , \quad x \in \overline{\Omega},$$

dove $M = \max\{x_1 ; x \in \overline{\Omega}\}$. La $(\ast)$ ci dice che le w^ε sono equi-limitate su $\overline{\Omega}$.

Un ragionamento analogo a quello del lemma di Hopf implica che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|Dw^\varepsilon| \leq C \qquad \text{su } \partial\Omega$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Infine, se $x_\varepsilon \in \Omega$ fosse un punto di massimo della funzione $\varphi^\varepsilon = |Dw^\varepsilon|^2$, si avrebbe in x_ε che

$$D\varphi^\varepsilon = 0 \quad \text{e} \quad D^2\varphi^\varepsilon \leq 0$$

e quindi che

$$(D^2 w^\varepsilon) Dw^\varepsilon = 0 \quad \text{e} \quad |D^2 w^\varepsilon|^2 + Dw^\varepsilon \cdot D(\Delta w^\varepsilon) \leq 0,$$

Perciò

$$\varepsilon \, |D^2 w^\varepsilon|^2 \leq - Dw^\varepsilon \cdot D(\varepsilon \Delta w^\varepsilon) = -2\langle D^2 w^\varepsilon Dw^\varepsilon, Dw^\varepsilon\rangle =$$
$$= 0 \quad \text{in } x^\varepsilon,$$

e dunque $\varphi^\varepsilon(x_\varepsilon^\varepsilon) = |Dw^\varepsilon(x_\varepsilon)|^2 = \varepsilon \Delta w^\varepsilon(x_\varepsilon) + 1 = 1$.

Concludiamo pertanto che

$$|Dw^\varepsilon| \leq \max(1, C) \qquad \text{su } \overline{\Omega},$$

il che vuol dire che le w^ε sono anche equi-lipschitziane in $\overline{\Omega}$. Per il teorema di Ascoli-Arzelà possiamo estrarre una sottosuccessione che converge uniformemente su $\overline{\Omega}$ e che continuiamo ad indicare con w^ε, Sia $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ la funzione limite uniforme delle w^ε per $\varepsilon \to 0^+$. Poiché le w^ε sono soluzioni di viscosità dell'equazione in (6), essendone soluzioni classiche, la teoria delle soluzioni di viscosità implica che w è soluzione di viscosità dell'equazione

(8) $$|Dw|^2 - 1 = 0 \quad \text{in } \Omega$$

e naturalmente $w = 0$ su $\partial\Omega$.

Ancora la teoria delle soluzioni di viscosità garantisce che

$$w(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

In sintesi, si ottiene che

(9) $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \{-\varepsilon \log v^\varepsilon(x)\} = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Notiamo che, se Γ è una superficie isotermica stazionaria per $u(x,t)$, essa è una superficie s-invariante per $V(x,s)$ e quindi ε-invariante per $v^\varepsilon(x)$. La (9) implica allora, di nuovo, che $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ è costante su Γ e quindi Γ è parallela a $\partial\Omega$.