ESEMPIO. Sia $z = re^{i\theta}$ e sia

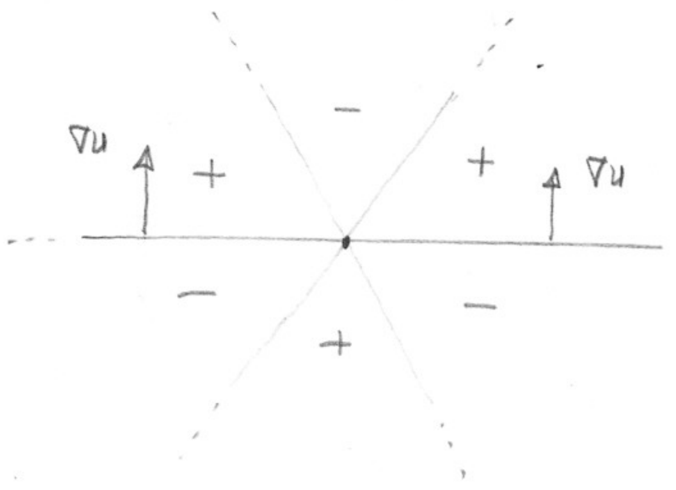
$$u(z) = \operatorname{Im}\left(\frac{z^{m+1}}{m+1}\right) = \frac{1}{m+1} r^{m+1} \sin(m+1)\theta,$$

dove $m \in \mathbb{N}$. Risulta che u è armonica e

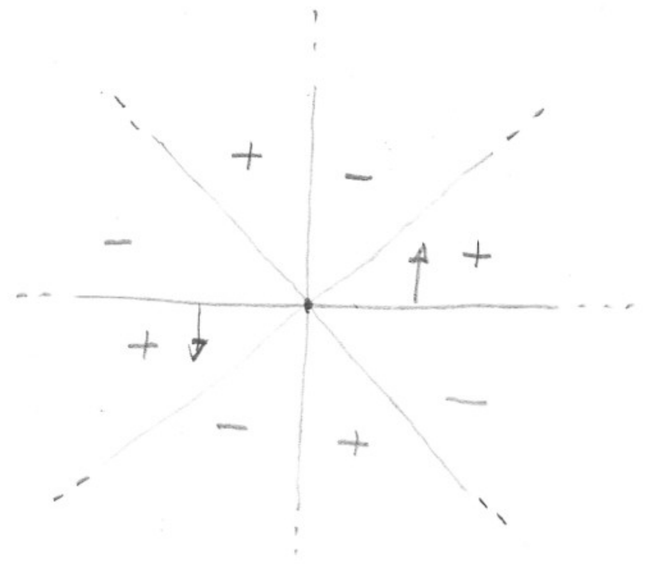
$$f(z) = u_x - i u_y = -i z^m,$$

cioè $z=0$ è un punto critico di u con molteplicità m.

In figura è evidenziato l'<u>insieme</u> <u>nodale</u> $\{z : u(z) = 0\}$ nei casi $m=2$ ed $m=3$.



$m=2$



$m=3$

Nel caso $m=2$ (m pari), attraversando $z=0$ il verso di ∇u non cambia, mentre nel caso $m=3$ (m dispari) sì.

Se scegliamo $\Omega = B(0,R)$, dato che su $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial r} = r^m \sin(m+1)\theta,$$

otteniamo che $M = M(J^+) = M(J^-) = m+1$. Dato che $\alpha = \nu$, abbiamo $D = 1$ e quindi $M - D = m$ ci restituisce il numero esatto dei punti critici di u in Ω.

Se scegliamo $\alpha = e_1$, otteniamo

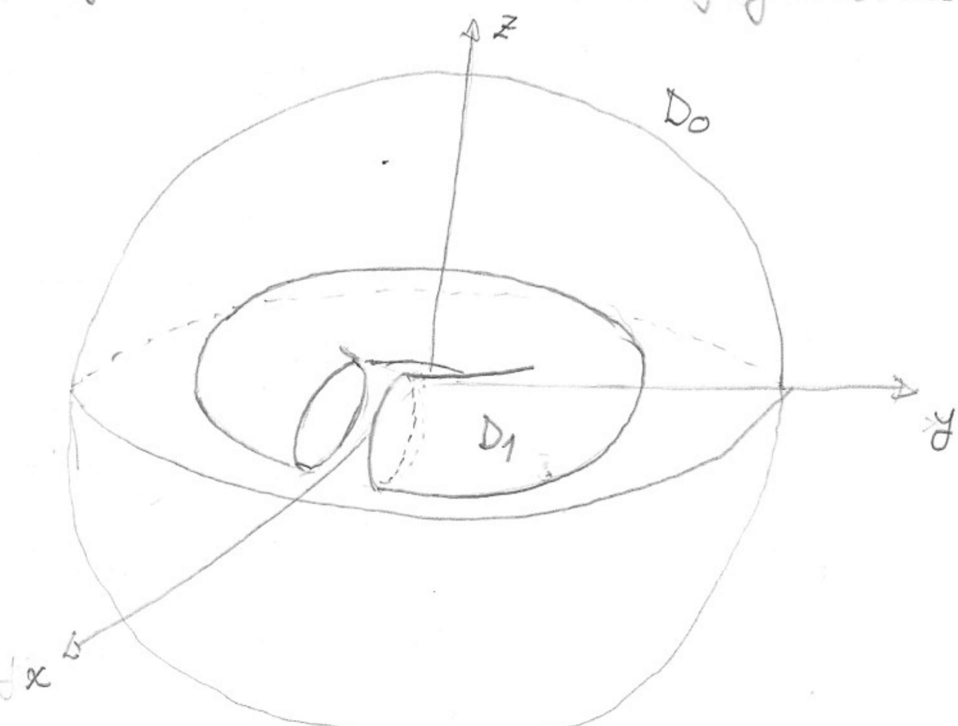
$$\nabla u \cdot \alpha = \frac{\partial u}{\partial x} = r^m \sin(m\theta),$$

e quindi $M = m$, $D = 0$ e $M - D = m$ di nuovo.

ESEMPIO. Abbiamo visto che, nel piano, il potenziale di capacità di un dominio duplicemente connesso non può avere punti critici. Questo fatto si verifica anche in dimensione qualsiasi, quando però le due componenti della frontiera siano il bordo di insiemi stellati rispetto allo stesso punto.

Se si rimuovono queste ipotesi, è possibile che un potenziale di capacità abbia qualche punto critico.

Sia infatti Ω il dominio in figura: esso è costituito



da una palla D_0 da cui è stato rimosso un toro "incompleto" D_1. Il toro è sistemato in modo che Ω risulti simmetrico rispetto ai piani xy e xz. Per questa ragione una eventuale funzione armonica u in Ω, avente valori $u \equiv 1$ su ∂D_1 e $u \equiv 0$ su ∂D_0, è simmetrica rispetto a quei due piani e quindi $u_y(x,0,0) = u_z(x,0,0) = 0$ se $(x,0,0) \in \Omega$.

Si noti ora che, per il teorema della media, il valore di u nell'origine è uguale alla media di u sulla palla centrata nell'origine e con raggio pari al raggio "interno" del toro. Questo valore non può superare lo stesso valore, minore di 1, calcolato quando il toro sia chiuso. D'altra parte, se le due estremità del toro si avvicinano, i valori di u tra di esse tendono ad 1. Poichè u è nulla su ∂D_0, è chiaro che $u(x,0,0)$ dovrà avere un massimo ed un minimo e quindi ∇u si dovrà annullare in due punti;

ESEMPIO. Sia

$$u(x,y,z) = J_0(r)\,\mathrm{ch}\,z \qquad \text{dove} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

e J_0 è la funzione di Bessel soddisfacente l'equazione

$$J_0'' + \frac{1}{r} J_0' + J_0 = 0 .$$

Allora $\Delta u = (J_0'' + \frac{1}{r} J_0')\,\mathrm{ch}\,z + J_0\,\mathrm{ch}\,z = 0$ ed inoltre

$$|\nabla u|^2 = J_0'(r)^2\,\mathrm{ch}^2 z + J_0(r)^2\,\mathrm{sh}^2 z = J_1(r)^2\,\mathrm{ch}^2 z + J_0(r)^2\,\mathrm{sh}^2 z$$

e quindi

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : |\nabla u(x,y,z)| = 0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ; z=0,\ J_1(\sqrt{x^2+y^2})=0\}$$

dato che J_0 e J_1 non si annullano mai insieme.

Siano $k_{n,0} < k_{n,1} < \dots$ gli zeri di J_n e sia S_R la sfera con centro nell'origine e raggio R.

La derivata radiale di u è:

$$\frac{(x,y,z)\cdot\nabla u}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{-r J_1(r)\,\mathrm{ch}\,z + J_0(r)\, z\,\mathrm{sh}\,z}{R} \qquad \text{su } S(0,R)$$

e quindi, se $k_{1,1} < R < k_{0,2}$, la derivata radiale si annulla su $S(0,R)$ solo quando $r = \rho_1$ o $r = \rho_2$, dove ρ_1 e ρ_2 sono le due soluzioni in $[0,R]$ di

$$\frac{r J_1(r)}{J_0(r)} = \sqrt{R^2-r^2}\ \mathrm{th}\sqrt{R^2-r^2}.$$

La derivata radiale (normale) di u su S_R è positiva in 3 zone connesse di $S(0,R)$ e negativa nelle altre 2 zone. Nella palla $B(0,R)$, ∇u si annulla nell'origine e sulla circonferenza $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0,\ x^2+y^2 = k_{1,1}^2\}$.

ESEMPIO. Se Ω non è semplicemente connesso, è possibile che il problema di Dirichlet

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

abbia una soluzione positiva con punti critici non isolati. Sia infatti Ω la corona circolare centrata nell'origine e con raggi ρ ed R, $0<\rho<R$ e sia $f(u) = u$.

È noto che la prima <u>funzione di Bessel</u>

$$J_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}$$

soddisfa l'equazione

$$J'' + \frac{1}{r} J' + J = 0$$

e si annulla in un'infinità numerabile di valori $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$.

Se scegliamo $\rho = k_1$ ed $R = k_2$, allora

$$u(x) = -J_0(|x|), \quad \rho < |x| < R,$$

è una soluzione positiva del problema di Dirichlet. È chiaro che, per il teorema di Rolle, esisterà un $r_0 \in (\rho, R)$ tale che $J_0'(r_0) = 0$. La circonferenza centrata nell'origine e raggio r_0 è dunque una curva di punti critici di u.

ESEMPIO. Un'equazione ellittica degenere può ammettere soluzioni con punti critici non isolati;

La funzione

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{(1-x^2-y^2)^2+4y^2} + \frac{1-x^2-y^2}{2}}$$

soddisfa l'equazione quasi-lineare

$$1) \quad [(u_x^2+u_y^2)^2+u_y^2]\, u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + [(u_x^2+u_y^2)^2+u_x^2]\, u_{yy} = 0$$

ed il suo gradiente si annulla su tutti i punti dell'asse delle y.

Si può dimostrare ancora di più.

TEOREMA. Sia u una soluzione di classe C^2 in un intorno di un suo punto critico z_0. Allora

(i) $\det \nabla^2 u(z_0) = 0$;

(ii) se $|\nabla^2 u(z_0)| > 0$, il gradiente di u si annulla su tutta una curva regolare passante per z_0.

Dim. (i) La tesi si ottiene scrivendo u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} e u_{yy} in formula di Taylor in un intorno di z_0, ed inserendo le espressioni ottenute nell'equazione (1).

(ii) Se fosse, per esempio, $u_{yy}(z_0) \neq 0$, per il teorema del Dini, l'insieme $\gamma = \{(x,y) : u_y(x,y) = 0\}$ sarebbe una curva regolare passante per z_0 (in un intorno di z_0).

Dalla (1) si ha su γ:

$$u_x^4\, u_{xx} + u_x^2(1+u_x^2)\, u_{yy} = 0.$$

Se z_0 fosse isolato, esisterebbe una successione di punti $z_n \in \gamma$ con $z_n \to z_0$ tale che $u_x(z_n) \neq 0$. Perciò

$$u_x^2\, u_{xx} + (1+u_x^2)\, u_{yy} = 0 \quad \text{in } z_n$$

e, facendo tendere z_n a z_0, si ottiene una contraddizione.

ESEMPIO. Costruzione di un potenziale di capacità di un dominio triplicemente connesso.

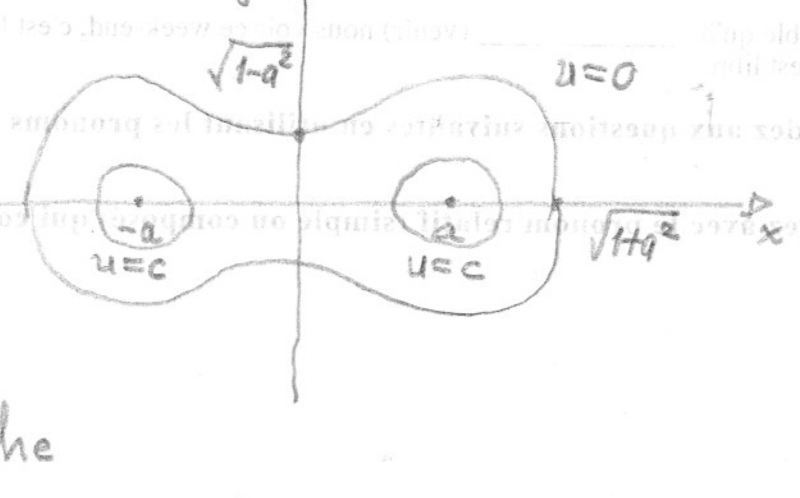
Sia $a \in (0,1)$ un parametro, la funzione

$$u(z) = \log|z-a| + \log|z+a|$$

è armonica per $z \neq a, -a$ e $\lim_{z \to \pm a} u(z) = -\infty$, mentre $\lim_{|z| \to \infty} u(z) = +\infty$.

Costruiamo il dominio Ω in modo che u sia costante su ciascuna componente connessa di $\partial\Omega$.

Si ha che $u = 0$ se e solo se $|z-a||z+a| = 1$; è facile verificare che, se $a \in (0,1)$, l'equazione $|z-a||z+a| = 1$ è quella di una curva semplice chiusa (un tipo di <u>lemniscata</u>). Se c è abbastanza piccolo ($c < 2\log a$), $u = c$ sul luogo dei punti z tali che $|z-a||z+a| = e^c$, che corrisponde a due curve semplici chiuse disgiunte, ciascuna contenente a e $-a$ (rispettivamente) al proprio interno.



Si noti che

$$\partial_z u(z) = \frac{z}{z^2 - a^2}$$

e quindi $\nabla u = 0$ se e solo se $z = 0$, cioè u ha un solo punto critico, in accordo con il teorema sui punti critici di un potenziale di capacità nel piano.

ESEMPIO. Autofunzioni dell'operatore di Laplace nel cerchio.

Sia $\Omega = B(0,R)$; un'<u>autofunzione</u> per il problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace è una soluzione non nulla del problema

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

Per il principio di massimo, deve essere $\lambda > 0$.

Introducendo le coordinate polari r e ϑ tali che $x = r\cos\vartheta$ e $y = r\sin\vartheta$, l'equazione differenziale in esame diventa:

$$(1) \qquad u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\vartheta\vartheta} + \lambda u = 0 .$$

Se cerchiamo soluzioni del tipo $u = A(r)\cos n\vartheta$ o $u = A(r)\sin n\vartheta$ con $n = 0, 1, \dots$, dovrà essere,

$$A'' + \frac{1}{r}A' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)A = 0 .$$

Conviene porre $A(r) = J(r\sqrt{\lambda})$ ed ottenere l'<u>equazione di Bessel</u> per J:

$$(2) \qquad J''(\rho) + \frac{1}{\rho}J'(\rho) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)J(\rho) = 0 .$$

Le soluzioni di questa equazione si dicono le <u>funzioni di Bessel</u>. Se $J(\rho)$ è una soluzione di (2), allora $u = J(\sqrt{\lambda}\,r)\cos n\vartheta$ e $u = J(\sqrt{\lambda}\,r)\sin n\vartheta$ sono soluzioni di (1) (su tutto $\mathbb{R}^2$).

Fissato $n = 0, 1, 2, \dots$, si indica con J_n la <u>funzione di Bessel di ordine</u> n; gli zeri di J_n sono un'infinità numerabile e si indicano con $k_{n,0} < k_{n,1} < k_{n,2} < \dots$.

Per esempio, la funzione

$$u(r,\vartheta) = J_1\left(k_{1,2}\frac{r}{R}\right)\cos\vartheta$$

è un'autofunzione in Ω corrispondente all'autovalore $\lambda = k_{1,2}^2$. Dato che

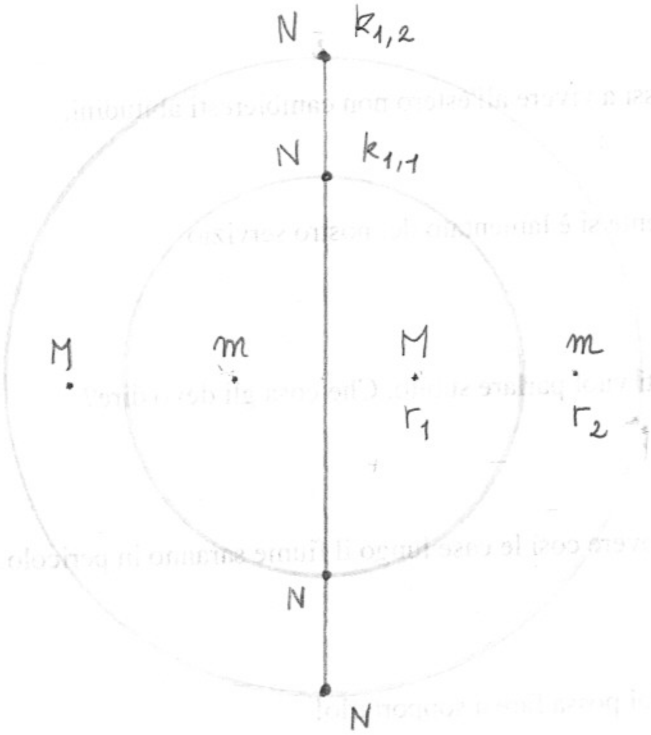
$$|\nabla u|^2 = u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\vartheta^2 =$$

$$= \left(\frac{k_{1,2}}{R}\right)^2 J_1'\left(k_{1,2}\frac{r}{R}\right)^2\cos^2\vartheta + J_1\left(k_{1,2}\frac{r}{R}\right)\frac{\sin^2\vartheta}{r^2},$$

∇u si annulla solo nei punti

$$(0,\pm k_{1,1}),\ (0,\pm k_{1,2}),\ (\pm r_1;0),\ (\pm r_2,0),$$

dove $J_1'\left(k_{1,2}\frac{r_i}{R}\right) = 0$, $i=1,2$, e $0<r_1<r_2<R$.



La situazione è schematizzata in figura (M=punto di massimo; m=punto di minimo; N = punto nodale). Risulta

$$\sum_{z_k\in\Omega} m(z_k) + \frac{1}{2}\sum_{z_k\in\partial\Omega} m(z_k) + n_S - n_E = 2+\frac{1}{2}\cdot 2 + 0 - 4 =$$

$$= -1 = n-2,$$

come previsto dal teorema.