PREREQUISITI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE. LA FUNZIONE DISTANZA.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio con frontiera $\partial\Omega$ non vuota. La <u>funzione distanza</u> $d : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ è definita da

$$d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Si vede subito che d è uniformemente lipschitziana: infatti, fissati $x, y \in \mathbb{R}^N$, sia $z \in \partial\Omega$ tale che $|y-z| = d(y)$; allora risulta:

$$d(x) \leq |x-z| \leq |x-y| + |y-z| = |x-y| + d(y);$$

scambiando x con y si conclude che $d(y) \leq |x-y| + d(x)$ e quindi

$$|d(x) - d(y)| \leq |x-y|.$$

Supponiamo ora che $\partial\Omega$ sia di classe C^2 e, per $x \in \partial\Omega$, indichiamo con $T_x(\partial\Omega)$ il piano tangente a $\partial\Omega$ in x e con $\nu(x)$ il versore della normale interna a $\partial\Omega$ in x.

Le curvature di $\partial\Omega$ in un punto fissato $x \in \partial\Omega$ si possono definire nel modo seguente. Scegliamo un sistema cartesiano di coordinate $y = (y_1, \dots, y_N)$ tale che $x = 0$, l'asse x_N ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\nu(x)$ e tale che, in un intorno I di x, $\partial\Omega$ è parametrizzata da

$$y_N = \varphi(y') \quad \text{con } y' = (y_1, \dots, y_{N-1}),$$
$$\varphi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla\varphi(0) = 0,$$

dove $\varphi \in C^2(I \cap T_x(\partial\Omega))$. Gli autovalori della matrice hessiana $\nabla^2\varphi(0)$ si dicono le <u>curvature principali di $\partial\Omega$ in x</u> e si indicano con $k_1(x), \dots, k_{N-1}(x)$; associate a questi autovalori ci sono degli autovettori che si dicono le <u>direzioni principali di $\partial\Omega$ in x</u>.

La <u>curvatura media di $\partial\Omega$ in x</u> si definisce allora con

$$H(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} k_j(x) = \frac{1}{N-1} \Delta\varphi(0).$$

Con un'ulteriore rotazione (intorno all'asse y_N) possiamo scegliere gli assi $y_1, \dots, y_{N-1}$ in corrispondenza delle direzioni principali di $\partial\Omega$ in x. Rispetto a questo nuovo sistema di riferimento, si ha

$$\nabla^2 \varphi(0) = \mathrm{diag}\,(k_1, \dots, k_{N-1}).$$

Oltre alla curvatura media, possiamo definire altri invarianti della superficie $\partial\Omega$ in x: il <u>j-simo</u> <u>invariante</u> <u>simmetrico</u> <u>di</u> $\partial\Omega$ <u>in</u> x si definisce così:

$$K_j(x) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_j \le N-1} k_{i_1}(x) \cdots k_{i_j}(x);$$

Se $j=1$, si ottiene $K_1 = (N-1)H$; l'$(N-1)$-esimo invariante simmetrico si dice la <u>curvatura</u> <u>di</u> <u>Gauss</u> <u>di</u> $\partial\Omega$ <u>in</u> x e si indica con $K(x)$:

$$K(x) = k_1(x)\, k_2(x) \cdots k_{N-1}(x);$$

Nel sistema di riferimento principale introdotto, la normale interna nel punto $y = (y', \varphi(y'))$ è data in componenti da:

$$(1) \qquad \nu_i(y) = -\frac{\nabla_i \varphi(y')}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(y')|^2}}, \quad i = 1, \dots, N-1, \qquad \nu_N(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(y')|^2}};$$

inoltre si ha:

$$(2) \qquad \nabla_j \nu_i(x) = -k_i(x)\, \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N-1,$$

Per $\sigma > 0$, poniamo infine $\Omega_\sigma = \{ y \in \overline{\Omega} : d(y) < \sigma \}$.

LEMMA 1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ limitato e con frontiera di classe C^m, $m \ge 2$. Allora esiste una costante $\sigma > 0$ dipendente da Ω tale che $d \in C^m(\Omega_\sigma)$.

Dim. La regolarità di Ω implica che Ω soddisfa la proprietà della sfera interna <u>uniformemente</u>, cioè, per ogni $x \in \partial\Omega$, esiste una palla $B(x, r(x))$ tale che $\overline{B(x, r(x))} \cap (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) = \{x\}$ ed inoltre esiste $r_0 > 0$ tale che

$$r(x) \geq r_0 \quad \text{per ogni } x \in \partial\Omega .$$

Posto $r = r(x)$, dato che $\overline{B(x,r)} \cap (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) = \{x\}$, nel sistema di riferimento sopra descritto si può scrivere:

$$\frac{|y'|^2}{r + \sqrt{r^2 - |y'|^2}} = r - \sqrt{r^2 - |y'|^2} > \varphi(y') = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} k_i(x)\, y_i^2 + o(|y'|^2);$$

da ciò segue che $k_i(x) \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{r_0}$, $i = 1, \dots, N-1$, $x \in \partial\Omega$.

Posto $\sigma = r_0$, per ogni $y \in \Omega_\sigma$ esiste un solo $x = x(y) \in \partial\Omega$ tale che $|x - y| = d(y)$ ed inoltre

(3) $\quad y = x + d(y)\, \nu(x)$.

Scegliendo il solito sistema di riferimento principale centrato in $x \in \partial\Omega$, sia $g : T_x(\partial\Omega) \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega_\sigma$ definita da

$$g(z', d) = z + d\, \nu(z) \quad , \quad z = (z', \varphi(z')),$$

con $x = (0, \varphi(0))$. È chiaro che g è di classe C^{m-1} ed inoltre

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(z', d) = \delta_{ij} - d\, \frac{\partial_{ij}\varphi(z')}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(z')|^2}} + d\, \frac{\sum_{\ell=1}^{N-1} \partial_{j\ell}\varphi(z')\, \partial_\ell \varphi(z')\, \partial_i \varphi(z')}{\{1 + |\nabla\varphi(z')|^2\}^{3/2}},$$

per $i, j = 1, \dots, N-1$,

$$\frac{\partial g_N}{\partial x_j}(z', d) = \partial_j \varphi(z') - d\, \frac{\sum_{\ell=1}^{N-1} \partial_{\ell j}\varphi(z')\, \partial_\ell \varphi(z')}{\{1 + |\nabla\varphi(z')|^2\}^{3/2}}, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial d}(z', d) = \nu_i(z'), \quad i = 1, \dots, N.$$

Perciò

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0, d) = [1 - d\, k_i(x)]\, \delta_{ij}, \quad i,j = 1, \dots, N-1, \qquad \frac{\partial g_N}{\partial x_j}(0, d) = 0, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

(4) $$\frac{\partial g_i}{\partial d}(0, d) = 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \qquad \frac{\partial g_N}{\partial d}(0, d) = 1,$$

e quindi il determinante jacobiano

$$\det J_g(0, d(y)) = \prod_{i=1}^{N-1} [1 - k_i(x)\, d(y)] > 0,$$

dato che $d(y) < \sigma$.

L'applicazione g si può allora invertire e la sua inversa g^{-1} è di classe C^{m-1}. Dalla (3) si ha che

$$(5) \qquad \nabla d(y) = \nu(x(y)),$$

cioè ∇d è un campo vettoriale di classe C^{m-1} e dunque $d \in C^m(\overline{\Omega}_\sigma)$. □

OSSERVAZIONE. La (5) implica anche che

$$|\nabla d(y)| = 1 \quad \text{per ogni } y \in \Omega_\sigma.$$

LEMMA 2. Sia Ω come nel LEMMA 1 e siano $y_0 \in \Omega_\sigma$ ed $x_0 \in \partial\Omega$ tali che $|y_0 - x_0| = d(y_0)$. Allora, nel solito sistema di riferimento principale centrato in x_0, risulta:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 d}{\partial y_i \partial y_j}(y_0) = -\frac{k_i(x_0)\, \delta_{ij}}{1 - d(y_0)\, k_i(x_0)}, \quad i, j = 1, \dots, N-1, \\ &\frac{\partial^2 d}{\partial y_i \partial y_N}(y_0) = \frac{\partial^2 d}{\partial y_N \partial y_i}(y_0) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

Dim. Poiché $\nabla d(y) = \nu(x(y))$ (che non dipende dalla distanza di y da $x(y)$) e dato che, nel nostro sistema di riferimento, y_N = distanza di y da x, si ottiene subito la seconda formula.

La prima formula segue invece dalle (1) e (2) e dal fatto che, per $i, j = 1, \dots, N-1$, si ha:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial y_i \partial y_j}(y_0) = \sum_{\ell=1}^{N-1} \partial_\ell \nu_i(x_0)\, \partial_j x_\ell(y_0) = -k_i(x_0)\, \partial_j x_i(y_0) =$$

$$= -k_i(x_0)\, \partial_j g^i(y_0),$$

dove g^i è la i-esima componente di g^{-1}.

Perciò la (4) implica che

$$\frac{\partial^2 d}{\partial y_i \partial y_j}(y_0) = -\frac{k_i(x_0)}{1-d(y_0)\,k_i(x_0)}\,\delta_{ij}\ ,\quad i,j=1,\dots,N-1, \qquad \square$$

OSSERVAZIONE. Si noti che, se $0 \le \sigma \le r_0$, le curvature principali della superficie $\Gamma_\sigma = \{y \in \Omega : d(y)=\sigma\}$, parallela a $\partial\Omega$, sono

$$(7) \quad k_i(y) = \frac{k_i(x)}{1-d(y)\,k_i(x)}\ , \quad i=1,\dots,N-1\ ,\quad y \in \Gamma_\sigma\ ,$$

dove $|y-x| = d(y)$ (dimostrarlo per esercizio).

La (6) e la (7) ci danno dunque la formula

$$K_1(y) = -\Delta d(y),$$

dove con $K_1(y)$ si intende il primo invariante simmetrico della superficie di livello di d passante per y.

OSSERVAZIONE. Dato che $\operatorname{div}(K_1 \nabla d) = \nabla d \cdot \nabla K_1 + K_1 \Delta d = \nabla d \cdot \nabla K_1 - K_1^2$, $\nabla^2 d\, \nabla d = \underline{0}$ (essendo $|\nabla d|^2 = 1$) e

$$0 = \operatorname{div}(\nabla^2 d\, \nabla d) = \nabla d \cdot \nabla(\Delta d) + |\nabla^2 d|^2,$$

si ha:

$$\operatorname{div}(K_1 \nabla d) = |\nabla^2 d|^2 - K_1^2 = k_1^2 + \dots + k_{N-1}^2 - (k_1 + \dots + k_{N-1})^2 = -2\sum_{i<j} k_i k_j = -2K_2 .$$

Con questo tipo di argomenti, si può dimostrare le formule:

$$-j\,K_j = \operatorname{div}(K_{j-1} \nabla d)\ , \quad j=1,\dots,N,$$

dove si intende $K_0 = 1$ e $K_N = 0$. (Si vedano anche R. C. Reilly, J. Diff. Geom. 8 (1973), 465-477 e R. Magnanini, Bull. London Math. Soc. 24 (1992), 565-574.)

Infine, se $\partial\Omega$ è la superficie di livello $u=c$ di una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ con $u>0$ in Ω e $\nabla u \ne 0$ su $\partial\Omega$, si ha:

$$K_1 = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \qquad (\text{su } \partial\Omega).$$