6. FAMIGLIE DI FUNZIONI ARMONICHE.

TEOREMA. Una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni armoniche in un aperto limitato Ω, continue in $\overline{\Omega}$ e convergente uniformemente su $\partial\Omega$, converge uniformemente in $\overline{\Omega}$ ad una funzione $u \in C^0(\overline{\Omega})$ armonica in Ω.

Dim. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon \quad \text{per } x \in \partial\Omega \text{ ed } n, m > \nu.$$

Essendo $u_n - u_m$ armonica in Ω, essa assume il suo massimo ed il suo minimo su $\partial\Omega$ e dunque

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon \quad \text{per } x \in \overline{\Omega} \text{ ed } n, m > \nu.$$

Per la completezza di $C^0(\overline{\Omega})$, esiste $u \in C^0(\overline{\Omega})$ a cui u_n converge uniformemente in $\overline{\Omega}$ se $n \to \infty$.

Resta da dimostrare che u è armonica in Ω. Sia $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$; per la proprietà della media

$$u_n(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u_n(y)\, dS_y,$$

e quindi, passando al limite per $n \to \infty$, otteniamo che

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y.$$

Per l'arbitrarietà di $B(x,r)$, concludiamo che u è armonica in Ω. $\square$

TEOREMA. (di convergenza di Harnack)

Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente di funzioni armoniche in un dominio aperto Ω e supponiamo che $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) < +\infty$ per qualche $x \in \Omega$.

Allora $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su ogni dominio limitato Ω', $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, ad una funzione armonica.

(2)

Dim. E' chiaro che $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge e quindi, per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\nu\in\mathbb{N}$ tale che $0\le u_m(x)-u_n(x)<\varepsilon$ per ogni $m\ge n>\nu$.

Sia Ω'' un connesso contenente sia Ω' che x e tale che $\overline{\Omega''}\subset\Omega$. Per la disuguaglianza di Harnack

$$\sup_{\Omega'}(u_m-u_n)\le\sup_{\Omega''}(u_m-u_n)\le C_{\Omega''}\inf_{\Omega''}(u_m-u_n)\le$$

$$\le C_{\Omega''}\{u_m(x)-u_n(x)\}<C_{\Omega''}\,\varepsilon,$$

per ogni $m\ge n>\nu$, Perciò $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in Ω'. L'armonicità del limite delle u_n segue dal teorema precedente. $\square$

TEOREMA (Criterio di compattezza) Sia $\mathcal{F}$ una famiglia infinita di funzioni armoniche equilimitate in ogni sottoinsieme compatto di un aperto Ω.

Allora esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{F}$ che converge uniformemente in ogni sottoinsieme compatto di Ω.

Dim. Per ogni compatto $K\subset\Omega$ esiste M_K tale che

$$|u(x)|\le M_K \quad \text{per ogni } x\in K \text{ e ogni } u\in\mathcal{F}.$$

Fissiamo un compatto $K\subset\Omega$; K può essere ricoperto con un numero finito di palle chiuse tutte contenute in Ω; sia K' il compatto formato da tali palle.

Per ogni $x\in K$, sia $\overline{B(x,r)}\subset K'$. Dato che u_{x_i} è anche armonica se $u\in\mathcal{F}$, per la proprietà della media abbiamo

$$u_{x_i}(x)=\fint_{B(x,r)}u_{x_i}(y)\,dy=\frac{N}{\omega_N r^N}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,\nu_i(y)\,dS_y\,,\quad i=1,\dots,N,$$

e quindi

$$|u_{x_i}(x)|\le\frac{N}{\omega_N r^N}\int_{\partial B(x,r)}|u(y)|\,dS_y\le\frac{N}{r}M_{K'}\,,\quad i=1,\dots,N$$

Perciò, le funzioni di $\mathcal{F}$ sono equicontinue su K e quindi, per il teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ che converge uniformemente in K. □

ESERCIZIO. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni armoniche non negative in un insieme aperto connesso Ω. Se $\sup_{u\in\mathcal{F}} u(x) < +\infty$ per qualche $x \in \Omega$, allora esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ che converge uniformemente in ogni sottoinsieme compatto di Ω.