8. IL METODO DI PERRON.

Sia $u \in C(\Omega)$; si dice che u è <u>subarmonica in</u> Ω se, per ogni $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ risulta:

$$u(x) \leq \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y .$$

Se $-u$ è subarmonica, si dice che u è <u>superarmonica</u>.

OSSERVAZIONE. È chiaro che, se $u_1, \dots, u_n$ sono subarmoniche e $c_1, \dots, c_n$ sono costanti non negative, allora $c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$ è subarmonica. Inoltre la funzione $v(x) = \max[u_1(x), \dots, u_n(x)]$ è anche subarmonica, dato che, se $k \in \{1, \dots, n\}$ è tale che $v(x) = u_k(x)$, si ha:

$$v(x) = u_k(x) \leq \fint_{\partial B(x,r)} u_k(y)\, dS_y \leq \fint_{\partial B(x,r)} v(y)\, dS_y .$$

LEMMA. Sia u subarmonica in Ω e sia $B = B(x,r)$ con $\overline{B} \subset \Omega$. Indichiamo con u_B la funzione armonica in B tale che $u_B = u$ su ∂B.
Allora la funzione

$$M_B(u) = \begin{cases} u_B & \text{in } B, \\ u & \text{in } \Omega \setminus B, \end{cases}$$

è subarmonica in Ω.

Dim. Sia $v = M_B(u)$; si noti che $u \leq v$ in Ω, dato che $u = v$ in $\Omega \setminus B$ e $u \leq v$ in B, essendo $u - v$ subarmonica in B e nulla su ∂B.

Sia $B' = B(x', r')$ una qualsiasi palla con $\overline{B'} \subset \Omega$ e sia $w = v_{B'}$, armonica in B', continua su $\overline{B'}$ e tale che $w = v$ su $\partial B'$.
Dato che $u \leq v$ in B', abbiamo che $u \leq w$ in B',

essendo $u-w$ subarmonica in B' e non positiva su $\partial B'$; perciò $v=u\leq w$ in $B'\setminus B$.

Inoltre $v\leq w$ in $B\cap B'$, perché $v-w$ è armonica in $B\cap B'$ e non positiva su $\partial(B\cap B')$. In definitiva $v\leq w$ in B' e quindi

$$v(x')\leq w(x')=\fint_{\partial B'} w(y)\,dy=\fint_{\partial B'} v(y)\,dy\,.\ \square$$

TEOREMA (Metodo di Perron)

Sia $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $\varphi:\partial\Omega\to\mathbb{R}$ limitata. Indichiamo con $S_\varphi(\Omega)$ la classe delle funzioni $v\in C^0(\overline{\Omega})$, subarmoniche in Ω e tali che $v\leq\varphi$ su $\partial\Omega$.

Allora la funzione definita da

$$u(x)=\sup\{v(x):\ v\in S_\varphi(\Omega)\},\quad x\in\Omega,$$

è armonica in Ω.

Dim. Per ogni $v\in S_\varphi$, $v\leq\sup_{\partial\Omega}\varphi$, dato che $v-\sup_{\partial\Omega}\varphi$ è subarmonica in Ω e non positiva su $\partial\Omega$; $u(x)$ è allora sempre finito.

Fissiamo $x\in\Omega$; per la definizione di u, esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset S_\varphi$ tale che $u_n(x)\to u(x)$ se $n\to+\infty$. Posto $v_n=\max(u_1,\dots,u_n)$ per $n\in\mathbb{N}$, ancora $v_n\in S_\varphi$ ed inoltre $v_n\leq v_{n+1}$ in Ω e $\lim_{n\to\infty}v_n(x)=u(x)$, dato che $u_n\leq v_n\leq u$.

Sia $B=B(x,r)$ con $\overline{B}\subset\Omega$. Le funzioni $w_n=M_B(v_n)$ stanno ancora in $S_\varphi(\Omega)$ ed inoltre $w_n\leq w_{n+1}$ in Ω. Inoltre ancora $\lim_{n\to\infty}w_n(x)=u(x)$, poiché $v_n\leq w_n\leq u$.

Dato che ogni w_n è armonica in B e $w_n(x)\leq u(x)<+\infty$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, per il teorema di convergenza di Harnack

$\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad una funzione armonica w in B e risulta che $w(x) = u(x)$.

Sia ora $x^* \in B$ ed indichiamo con $\{u_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $S_\varphi(\Omega)$ convergente in x^* ad $u(x^*)$. Le funzioni $v_n^* = \max(v_n, u_1^*, \dots, u_n^*)$ e $w_n^* = M_B(v^*)$ sono elementi di $S_\varphi(\Omega)$ e risulta $v_n^* \leq v_{n+1}^*$ e $w_n^* \leq w_{n+1}^*$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed inoltre $w_n^*(x^*) \to u(x^*)$ se $n \to \infty$ ed anche $w_n \leq w_n^*$. Sempre per il teorema di Harnack, $\{w_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad una funzione armonica w^* in B e tale che $w^*(x^*) = u(x^*)$.

Dato che $w_n \leq w_n^*$ in B, anche $w \leq w^* \leq u$ in B, quindi $u(x) = w(x) \leq w^*(x) \leq u(x)$ e cioè $w^*(x) = w(x) = u(x)$.

Pertanto $w - w^*$ risulta essere una funzione armonica e non positiva in B, e nulla in $x \in B$. Per il principio di massimo forte, $w - w^* \equiv 0$ in B ed in particolare

$$u(x^*) = w^*(x^*) = w(x^*).$$

Per l'arbitrarietà di x^* in B, allora $u \equiv w$ in B, cioè u è armonica in B e, per l'arbitrarietà di B in Ω, u è armonica in Ω. $\square$

Sia $x_0 \in \partial\Omega$; una funzione $w^{x_0} \in C^0(\overline{\Omega})$ si dice una <u>barriera</u> <u>in</u> x_0 <u>per</u> Ω se

(i) w^{x_0} è superarmonica in Ω;

(ii) $w^{x_0} > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$ e $w^{x_0}(x_0) = 0$.

OSSERVAZIONE. Si noti che l'esistenza di una barriera in x_0 per Ω è una proprietà locale di $\partial\Omega$.

Infatti se w soddisfa (i) e (ii) solo in un intorno $B(x_0, 2\varepsilon) \cap \Omega$ di x_0, allora posto

$m = \inf \{ w(y) : y \in B(x_0, 2\varepsilon) \setminus B(x_0, \varepsilon),\ y \in \Omega \}$ e

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} \min[m, w(x)] & , x \in \overline{\Omega} \cap B(x_0, \varepsilon) \\ m & , x \in \overline{\Omega} \setminus B(x_0, \varepsilon) \end{cases}$$

$\tilde{w}$ è una barriera in x_0 per Ω. Infatti $\tilde{w} \in C^0(\overline{\Omega})$, $\tilde{w}$ è superarmonica in Ω ed è chiaro che vale (ii).

Si dice che un punto $x_0 \in \partial\Omega$ è <u>regolare</u> (rispetto all'operatore di Laplace) se esiste una barriera in x_0 per Ω.

TEOREMA. Sia u la funzione armonica definita in Ω con il metodo di Perron. Se $x_0 \in \partial\Omega$ è un punto regolare e $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ è continua in x_0, allora

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0).$$

Dim. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $M = \max_{\partial\Omega} |\varphi|$. Poiché φ è continua, esiste $\delta > 0$ tale che $|\varphi - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ su $\partial\Omega \cap B(x_0, \delta)$. Dato che x_0 è regolare, esiste una barriera w in x_0 per Ω e, posto

$$M_\varepsilon = \max \left\{ \frac{|\varphi(x) - \varphi(x_0)|}{w(x)} : x \in \partial\Omega,\ |x - x_0| \geq \delta \right\},$$

risulta $|\varphi - \varphi(x_0)| \leq M_\varepsilon w$ su $\partial\Omega$ e all'esterno di $B(x_0, \delta)$.

Perciò $|\varphi - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon + M_\varepsilon w$ su $\partial\Omega$, cioè la funzione $\varphi(x_0) - \varepsilon - M_\varepsilon w$ appartiene alla classe $S_\varphi(\Omega)$ mentre $\varphi(x_0) + \varepsilon + M_\varepsilon w$ è superarmonica in Ω e non è più piccola di φ su $\partial\Omega$.

Dunque

$$\varphi(x_0) - \varepsilon - M_\varepsilon w \leq u \leq \varphi(x_0) + \varepsilon + M_\varepsilon w \quad \text{in } \Omega,$$

ossia $\quad |u - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon + M_\varepsilon w \quad$ in Ω.

In conclusione

$$\limsup_{x \to x_0} |u(x) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, otteniamo la tesi. $\square$

TEOREMA. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato. Il problema di Dirichlet di trovare una $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tale che

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ su } \partial\Omega,$$

è risolvibile per ogni $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ se e solo se ogni punto di $\partial\Omega$ è regolare.

DIM. Abbiamo già dimostrato un'implicazione. Se invece il problema di Dirichlet è risolvibile per ogni $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, fissato $x_0 \in \partial\Omega$, una barriera in x_0 si costruisce come la soluzione del problema di Dirichlet in cui si è scelto $\varphi(x) = |x - x_0|$, $x \in \partial\Omega$. $\square$

ESEMPIO. Una condizione sufficiente affinché $x_0 \in \partial\Omega$ sia un punto regolare è la seguente: si dice che Ω soddisfa la <u>proprietà della sfera esterna</u> in $x_0 \in \partial\Omega$ se esiste una pallina $B(y,r)$ tale che $\overline{B(y,r)} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$.
In questo caso la funzione $w(x) = \Phi(x_0 - y) - \Phi(x - y)$ è una barriera in x_0 per Ω.

OSSERVAZIONE. È chiaro che, se ogni punto di $\partial\Omega$ è regolare, allora esiste la funzione di Green per Ω: risulta infatti risolvibile, per ogni $x \in \Omega$, il problema

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{in } \Omega, \\ h(y) = \Phi(y - x), & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$